

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 601

Mathématiques et Sciences et Technologies

de l'Information et de la Communication

Spécialité : *Informatique*

Par

Loïc PUJET

Computing with Extensionality Principles in Type Theory

Calculer avec des Principes d'Extensionnalité en Théorie des Types

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 13 décembre 2022

Unité de recherche : Laboratoire des Sciences du Numérique de Nantes

Rapporteurs avant soutenance :

Thierry COQUAND Professor, University of Gothenburg
Conor MCBRIDE Reader, University of Strathclyde

Composition du Jury :

Président :	<i>(à préciser après la soutenance)</i>	
Examineurs :	Paige Randall NORTH	Honorary Research Fellow, University of Birmingham
	Ambrus KAPOSÍ	Associate Professor, Eötvös Loránd University
	Kuen-Bang HOU (Favonia)	Assistant Professor, University of Minnesota
	Tom HIRSCHOWITZ	Directeur de Recherche, Université Savoie Mont-Blanc
	Jonathan STERLING	Postdoctoral Fellow, Aarhus University
Directeur de thèse :	Nicolas TABAREAU	Directeur de Recherche, INRIA Rennes

Titre : Calculer avec des Principes d'Extensionnalité en Théorie des Types

Mots clés : Théorie des Types, Assistants à la Preuve, Preuve de Normalisation, Égalité Observationnelle, Théorie Cubique des Types, Homotopie Synthétique

Résumé : Dans cette thèse, j'étudie plusieurs manières d'étendre la théorie des types intuitionniste avec des principes d'extensionnalité comme par exemple l'extensionnalité des fonctions ou l'axiome d'univalence de Voevodsky, tout en préservant les propriétés calculatoires des preuves.

Dans une première partie, je développe une méta-théorie complète pour l'égalité observationnelle de Altenkirch *et al.* J'obtiens notamment une preuve formelle de normalisation, de canonicité et de décidabilité de la conversion pour une théorie des types observationnelle avec des propositions imprédicatives.

Dans une seconde partie, j'esquisse une traduction de la théorie des types homotopique vers la théorie des types observationnelle, en me basant sur le modèle cubique de Coquand *et al.*

Enfin dans une dernière partie, j'explique comment tirer parti des propriétés calculatoires de la théorie des types cubique pour obtenir des preuves synthétiques élégantes de résultats classiques de la théorie de l'homotopie, notamment la construction de la fibration de Hopf et le lemme 3x3 pour les sommes amalgamées homotopiques.

Title : Computing with Extensionality Principles in Type Theory

Keywords : Type Theory, Proof Assistants, Normalization Proofs, Observational Equality, Cubical Type Theory, Synthetic Homotopy Theory

Abstract : In this thesis, I study several possibilities to extend intuitionistic type theory with extensionality principles such as function extensionality or Voevodsky's univalence axiom, while preserving the computational properties of the proofs.

In the first part, I develop a complete meta-theory for the observational equality of Altenkirch *et al.* In particular, I obtain a formal proof of normalization, canonicity and decidability of the conversion for an observational type theory with impredicative proof-irrelevant propositions.

Then in a second part, I sketch a translation from homotopy type theory to observational type theory based on the model of Coquand *et al.* in cubical sets.

Finally, in the last part I explain how to take advantage of the computational properties of cubical type theory to obtain elegant synthetic proofs of classical results from homotopy theory, in particular the construction of the Hopf fibration and the 3x3 lemma for homotopy pushouts.