

# THÈSE DE DOCTORAT

NANTES UNIVERSITÉ  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

Ecole Doctorale N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*  
Par

**NGUYEN Thi Ngoc Anh**

**Géométrie énumérative réelle des variétés de Fano de dimension 3 et d'indice 2**

Thèse présentée et soutenue à l'NANTES UNIVERSITÉ, le 05 Décembre 2022  
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

**Rapporteurs :**

**Jean-Yves WELSCHINGER**, Directeur de recherche, Université Lyon 1  
**Frédéric BIHAN**, Maître de conférences HDR, Université Savoie Mont Blanc

**Jury :**

Président :

Examineurs :

**Penka GEORGIEVA**, Professeur, Sorbonne Université  
**Susanna ZIMMERMANN**, Professeur, Université Paris Saclay  
**Christophe SORGER**, Professeur, Nantes Université  
**Jean-Yves WELSCHINGER**, Directeur de recherche, Université Lyon 1  
**Frédéric BIHAN**, Maître de conférences HDR, Université Savoie Mont Blanc

Directeur de thèse : **Erwan BRUGALLÉ**, Professeur, Nantes Université

---

**Titre :** Géométrie énumérative réelle des variétés de Fano de dimension 3 et d'indice 2

**Mot clés :** Géométrie énumérative, invariants de Gromov-Witten et de Welschinger

**Résumé :** En géométrie énumérative, les invariants de Gromov-Witten sont connus comme l'un des problèmes classiques concernant le compte de courbes complexes passant par une contrainte générique dans les variétés projectives. Depuis 2003, les invariants de Welschinger sont connus comme la contrepartie réelle des invariants de Gromov-Witten, c'est-à-dire l'énumération de courbes réelles avec un choix cohérent de signe  $\pm 1$ , tel que le compte se fait indépendamment du choix de contrainte. Alors que les invariants de Gromov-Witten et de Welschinger des surfaces ont été systématiquement étudiés ces dernières années, de nombreuses questions dans le cas de la dimension trois restent à explorer.

Cette thèse s'inspire des travaux sur les calculs des invariants de Gromov-Witten et de Welschinger de l'espace projectif complexe par E. Brugallé et P. Georgieva en 2016. Nous appliquons leur stratégie pour obtenir les formules calculant des invariants de Gromov-Witten et de Welschinger des variétés de Fano de dimension trois, dont la première classe de Chern est paire, en mettant l'accent sur les cas des degré 6, 7 et 8. Nous généralisons également un résultat de J. Kollár sur l'optimalité des égalités énumératives réelles sur de tels espaces. Ces résultats pourraient suggérer de nouvelles directions de recherche sur les relations en les géométries énumératives complexe et réelle, ainsi qu'entre celles des variétés de dimension 2 et 3.

---

**Title:** Real enumerative geometry in Fano varieties of dimension 3 and index 2

**Keywords:** Enumerative geometry, Gromov-Witten and Welschinger invariants

**Abstract:** In enumerative geometry, Gromov-Witten invariants are known as one of the classical problems concerned with counting complex curves passing through a generic constraint in projective varieties. Since 2003, Welschinger invariants have been known to be the real counterpart of Gromov-Witten invariants, i.e. the enumeration of real curves with a consistent choice of sign  $\pm 1$ , such that this count is independent of the choice of configuration. While Gromov-Witten and Welschinger invariants of 2-dimensional varieties have been systematically studied in recent years, many questions in the 3-dimensional case remain to be explored.

This thesis is inspired by the work on the computations of Gromov-Witten and Welschinger invariants of complex projective space by E. Brugallé and P. Georgieva in 2016. We apply their strategy to obtain the formulas for computing Gromov-Witten and Welschinger invariants of 3-dimensional Fano varieties, whose first Chern class is even, with emphasis on the cases of degree 6, 7 and 8. We also generalize a result of J. Kollár about the optimality of real enumerative equalities on such spaces. These results could suggest new research directions on the relationship between complex and real enumerative geometry, as well as between those of varieties of dimension 2 and 3.