

# Réallocation de Levenberg-Marquardt

**F. Auger, É. Chassande-Mottin, P. Flandrin**

**IREENA**

Institut de Recherche en  
Electrotechnique et Electronique  
de Nantes-Atlantique



**ENSE**  
ENS DE LYON



**XXIII<sup>e</sup> Colloque GRETSI**



**Bordeaux**

**5-8 Septembre 2011**



14 septembre 2011

# Introduction

Comment obtenir des représentations temp-fréquence non-paramétriques **fortement localisées** de signaux non-stationnaires ?



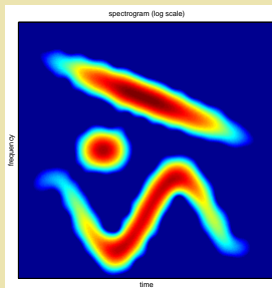
Techniques récemment étudiées :

- décomposition modale empirique
- synchrosqueezing
- réallocation

Présentation d'une nouvelle méthode de réallocation du spectrogramme qui permet de **choisir le degré de focalisation** de la représentation obtenue.

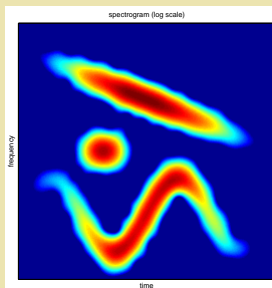
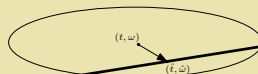
# La réallocation du spectrogramme (2/4)

réallocation = redistribution de l'énergie du signal



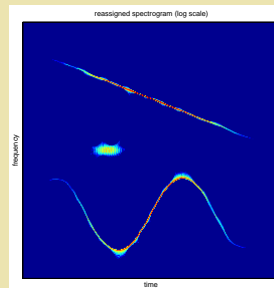
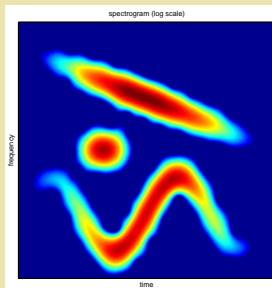
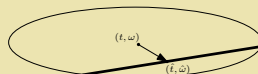
# La réallocation du spectrogramme (2/4)

réallocation = redistribution de l'énergie du signal



# La réallocation du spectrogramme (2/4)

réallocation = redistribution de l'énergie du signal



# La réallocation du spectrogramme (1/4)

## réallocation : principe et définitions

La réallocation consiste à **déplacer chaque valeur** calculée du spectrogramme, considéré comme une mesure locale d'énergie du point  $(t, \omega)$  où il est calculé **vers le centre de gravité** de l'énergie contenue autour de  $(t, \omega)$ , **déduit de la phase**  $\Phi_x(t, \omega)$  de la transformée de Fourier court-terme dans le cas du spectrogramme.

$$F_x(t, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u) h^*(t - u) e^{-j\omega u} du = M_x(t, \omega) e^{j\Phi_x(t, \omega)}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{t}_x(t, \omega) \\ \hat{\omega}_x(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega}(t, \omega) \\ \omega + \frac{\partial \Phi_x}{\partial t}(t, \omega) \end{pmatrix}$$

$$\text{RSP}_x(t, \omega) = \iint |F_x(u, \Omega)|^2 \delta(t - \hat{t}_x(u, \Omega)) \delta(\omega - \hat{\omega}_x(u, \Omega)) du \frac{d\Omega}{2\pi}$$

Du fait de cette origine, la réallocation **n'a pas de paramètre de réglage** : il n'est pas possible de concentrer *plus ou moins* l'énergie du signal.

# La réallocation du spectrogramme (3/4)

## réallocation = focalisation autour des arêtes

La réallocation tend à concentrer l'énergie autour des "arêtes" du signal, pour lesquelles  $\hat{t}_x(t, \omega) = t$  et  $\hat{\omega}_x(t, \omega) = \omega$ , soit

$$R_x(t, \omega) = \begin{pmatrix} t - \hat{t}_x(t, \omega) \\ \omega - \hat{\omega}_x(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + \frac{\partial \Phi_x}{\partial \omega}(t, \omega) \\ -\frac{\partial \Phi_x}{\partial t}(t, \omega) \end{pmatrix} = 0$$

On peut donc considérer les opérateurs de réallocation comme **une itération** d'un algorithme de recherche de l'arête du signal la plus proche de  $(t, \omega)$ .

# La réallocation du spectrogramme (4/4)

## réallocation et recherche des racines

À chaque algorithme de recherche des zéros d'une fonction peut être associé un processus de réallocation :

<p>méthodes de point fixe</p> $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$	<p>réallocation classique (<math>\lambda = 1</math>)</p> $\begin{pmatrix} \hat{t}_x(t, \omega) \\ \hat{\omega}_x(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} - R_x(t, \omega)$ <p>[Kodera, Gendrin, de Villedary, 1978]</p>
<p>méthodes différentielles</p> $\frac{dx}{du}(u) = -\lambda f(x(u))$	<p>réallocation différentielle (<math>\lambda = 1</math>)</p> $\begin{pmatrix} \frac{d\hat{t}_x}{du}(u) \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{du}(u) \end{pmatrix} = -R_x(\hat{t}_x(u), \hat{\omega}_x(u)) \quad \begin{pmatrix} \frac{d\hat{t}_x}{du}(0) \\ \frac{d\hat{\omega}_x}{du}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>[Chassande-Mottin, Daubechies, Auger, Flandrin, 1997]</p>
<p>méthodes "quasi-newtoniennes"</p> $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \mu}$	<p>réallocation de Levenberg-Marquardt</p> <p>?</p>



# La réallocation de Levenberg-Marquardt (1/3)

## Définition : Levenberg-Marquardt en dimension 2

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_x(t, \omega) \\ \tilde{\omega}_x(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \omega \end{pmatrix} - (\nabla R_x(t, \omega) + \mu I_2)^{-1} R_x(t, \omega)$$

$$\nabla R_x^h(t, \omega) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_x}{\partial t}(t, \omega) & \frac{\partial R_x}{\partial \omega}(t, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t \partial \omega}(t, \omega) & \frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial \omega^2}(t, \omega) \\ -\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t^2}(t, \omega) & -\frac{\partial^2 \Phi_x}{\partial t \partial \omega}(t, \omega) \end{pmatrix}$$

## Propriétés

- ajustabilité : le facteur d'amortissement positif  $\mu$  permet de passer de l'immobilisme ( $\mu \rightarrow +\infty$ ) à la **réallocation newtonienne** ( $\mu = 0$ ).

- homogénéité :  $\begin{pmatrix} s \\ s^{-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & s^2 \\ s^{-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s^{-1} \end{pmatrix}$

- invariance par translations : Si  $y(t) = x(t - t_0) e^{j\omega_0 t}$ , alors

$$\begin{cases} \tilde{t}_y(t, \omega) = t_0 + \tilde{t}_x(t - t_0, \omega - \omega_0) \\ \tilde{\omega}_y(t, \omega) = \omega_0 + \tilde{\omega}_x(t - t_0, \omega - \omega_0) \end{cases}$$

# La réallocation de Levenberg-Marquardt (2/3)

## Exemples analytiques

Possibilité de calculer **analytiquement** les opérateurs de réallocation lorsque la fenêtre d'analyse est gaussienne, d'énergie unitaire et de largeur temporelle  $\lambda$  :  $h(t) = \lambda^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{-t^2/(2\lambda^2)}$

$x(t)$	$\hat{t}_x(t, \omega)$	$\hat{\omega}_x(t, \omega)$	$\tilde{t}_x(t, \omega)$	$\tilde{\omega}_x(t, \omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$t$	$\omega_0$	$t$	$\frac{\omega_0 + \mu\omega}{1 + \mu}$
$\delta(t - t_0)$	$t_0$	$\omega$	$\frac{t_0 + \mu t}{1 + \mu}$	$\omega$
$\frac{e^{-t^2/(2T^2)}}{T^{1/2} \pi^{1/4}}$	$\frac{T^2}{\lambda^2 + T^2} t$	$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + T^2} \omega$	$\frac{\mu(\lambda^2 + T^2)}{\lambda^2 + \mu(\lambda^2 + T^2)} t$	$\frac{\mu(\lambda^2 + T^2)}{\lambda^2 + \mu(\lambda^2 + T^2)} \omega$
$e^{j\alpha t^2/2}$	$\frac{t + \alpha\lambda^4\omega}{1 + \alpha^2\lambda^4}$	$\alpha \hat{t}_x(t, \omega)$	$t + \frac{\alpha\lambda^4(\omega - \alpha t)}{(1 + \mu)(1 + \alpha^2\lambda^4)}$	$\omega - \frac{(\omega - \alpha t)}{(1 + \mu)(1 + \alpha^2\lambda^4)}$

# La réallocation de Levenberg-Marquardt (2/3)

## Exemples analytiques

Possibilité de calculer **analytiquement** les opérateurs de réallocation lorsque la fenêtre d'analyse est gaussienne, d'énergie unitaire et de largeur temporelle  $\lambda$  :  $h(t) = \lambda^{-1/2} \pi^{-1/4} e^{-t^2/(2\lambda^2)}$

$x(t)$	$\hat{t}_x(t, \omega)$	$\hat{\omega}_x(t, \omega)$	$\tilde{t}_x(t, \omega)$ si $\mu = 0$	$\tilde{\omega}_x(t, \omega)$ si $\mu = 0$
$e^{j\omega_0 t}$	$t$	$\omega_0$	$t$	$\omega_0$
$\delta(t - t_0)$	$t_0$	$\omega$	$t_0$	$\omega$
$\frac{e^{-t^2/(2T^2)}}{T^{1/2}\pi^{1/4}}$	$\frac{T^2}{\lambda^2 + T^2} t$	$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 + T^2} \omega$	<b>0</b>	<b>0</b>
$e^{j\alpha t^2/2}$	$\frac{t + \alpha \lambda^4 \omega}{1 + \alpha^2 \lambda^4}$	$\alpha \hat{t}_x(t, \omega)$	$\frac{t + \alpha \lambda^4 \omega}{1 + \alpha^2 \lambda^4}$	$\alpha \tilde{t}_x(t, \omega)$

# La réallocation de Levenberg-Marquardt (3/3)

## Algorithmes efficaces

Possibilité de calculer numériquement les opérateurs de réallocation pour **n'importe quelle fenêtre d'analyse** en utilisant des transformées de Fourier court-terme supplémentaires.

$$\frac{\partial \phi_x^h}{\partial \omega}(t, \omega) = -t + \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{\text{Th}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right)$$

$$\frac{\partial \phi_x^h}{\partial t}(t, \omega) = \operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{\text{Dh}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_x^h}{\partial t^2}(t, \omega) = \operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{\text{D}^2 h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} - \left( \frac{F_x^{\text{Dh}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_x^h}{\partial t \partial \omega}(t, \omega) = \operatorname{Re} \left( \frac{F_x^{\text{TDh}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} - \frac{F_x^{\text{Th}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \frac{F_x^{\text{Dh}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi_x^h}{\partial \omega^2}(t, \omega) = -\operatorname{Im} \left( \frac{F_x^{\text{T}^2 h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} - \left( \frac{F_x^{\text{Th}}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right)^2 \right)$$

# La réallocation de Levenberg-Marquardt (3/3)

## Algorithmes efficaces

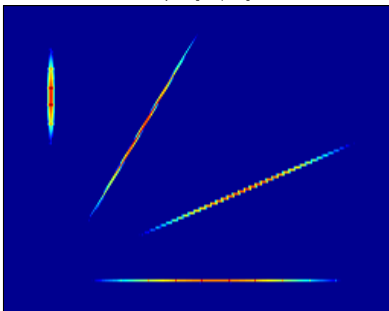
Possibilité de calculer numériquement les opérateurs de réallocation pour **n'importe quelle fenêtre d'analyse** en utilisant des transformées de Fourier court-terme supplémentaires.

## Conséquences

- La réallocation de Levenberg-Marquardt nécessite 5 transformées de Fourier court-terme, soit 3 de plus que la réallocation “classique”.
- Dans le cas où la fenêtre d'analyse est gaussienne (Gabor) seulement 2 transformées de Fourier court-terme sont nécessaires, soit une de plus que pour la réallocation “classique”.
- Les opérateurs de réallocation de Levenberg-Marquardt sont des rapports de quantités **bilinéaires** du signal.

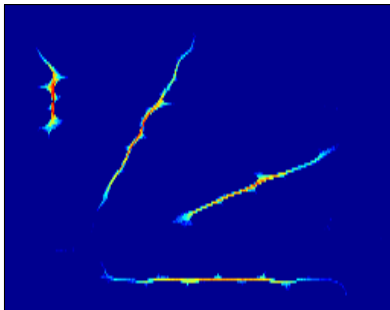
# Résultats numériques (signal purement déterministe)

classically reassigned spectrogram



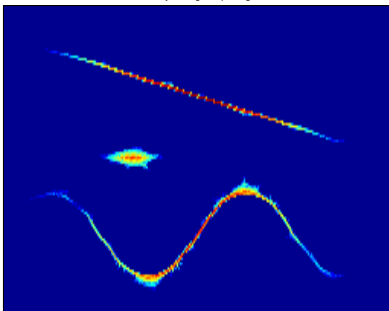
# Résultats numériques (RSB = 6 dB)

classically reassigned spectrogram



# Résultats numériques (signal purement déterministe)

classically reassigned spectrogram





# Conclusion

## Bilan

- Ce nouvel opérateur de réallocation peut permettre d'obtenir une concentration des composantes du signal à la fois plus forte et plus faible que la réallocation classique, grâce au paramètre  $\mu$ .
- Le coût de calcul est raisonnable.
- Le choix de  $\mu$  permet de passer de l'immobilisme à la réallocation newtonienne, sans qu'une valeur particulière ne permette d'obtenir la réallocation classique.

## Perspectives

- adaptation de  $\mu$  à la structure locale du signal
- extension aux ondelettes continues
- extension aux RTF de la classe de Cohen

## Reproductibilité

Cette présentation et des codes MATLAB seront disponibles sur <http://www.univ-nantes.fr/auger-f>