

Exo 1

- a) Ce système n'est pas causal puisque sa réponse impulsionnelle $h_1(t)$ n'est pas un signal causal : elle prend des valeurs non nulles à des instants négatifs (pour $-\frac{T}{2} < t < 0$, $h_1(t) = -E/2$).
(voir cours)

$$\begin{aligned} b) H_1(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} \underbrace{h_1(t)}_{\text{volts}} \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{\text{secondes}} dt = \int_{-T/2}^0 (-E/2) e^{-j2\pi f t} dt + \int_0^{T/2} (E/2) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \left(-\frac{E}{2}\right) \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right) \left[e^{-j2\pi f t}\right]_{-T/2}^0 + \left(\frac{E}{2}\right) \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right) \left[e^{-j2\pi f t}\right]_0^{T/2} \\ &= \frac{E}{2} \frac{1}{j2\pi f} \left(1 - e^{j2\pi f \frac{T}{2}}\right) - \frac{E}{2} \frac{1}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} - 1\right) \\ &= \frac{E}{j4\pi f} \left(1 - e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T} + 1\right) = \frac{E}{j4\pi f} \left(2 - 2\cos(\pi f T)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{H_1(f) = \frac{E}{j2\pi f} (1 - \cos(\pi f T))}$$

On peut vérifier que $H_1(f)$ est en V.s

Au voisinage de zéro $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ donc $1 - \cos(x) \approx \frac{x^2}{2}$

donc au voisinage de zéro $H_1(f) \approx \frac{E}{j2\pi f} \frac{(\pi f T)^2}{2} = \frac{E \pi^2 f^2 T^2}{j4\pi f}$

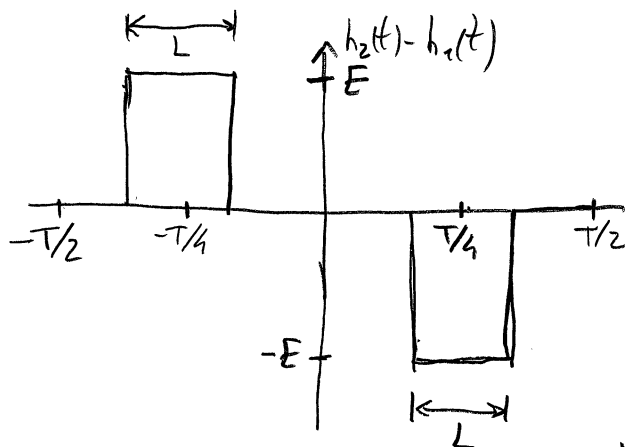
$$H_1(f) \approx \frac{E \pi f T^2}{j4} \quad \text{donc} \quad \boxed{H_1(0) = 0}$$

C'est normal : la valeur moyenne de $h_1(t)$ est visiblement nulle

$$H_1\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{ET}{j2\pi} \left(1 - \cos\left(\pi \frac{T}{T}\right)\right) = \frac{2ET}{j2\pi} = \boxed{\frac{ET}{j\pi} = H_1\left(\frac{1}{T}\right)}$$

$\cos(\pi) = -1$

② c)



$$h_2(t) - h_1(t) = \begin{cases} E & \text{si } -\frac{T}{4} - \frac{L}{2} < t < -\frac{T}{4} + \frac{L}{2} \\ -E & \text{si } \frac{T}{4} - \frac{L}{2} < t < \frac{T}{4} + \frac{L}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$H_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [h_1(t) + h_2(t) - h_1(t)] e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= H_1(f) + \int_{-\infty}^{+\infty} (h_2(t) - h_1(t)) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= H_1(f) + \int_{-T/4-L/2}^{-T/4+L/2} E e^{-j2\pi f t} dt + \int_{T/4-L/2}^{T/4+L/2} (-E) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$= H_1(f) + E \times \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right) \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{-T/4-L/2}^{-T/4+L/2} + (-E) \left(-\frac{1}{j2\pi f}\right) \left[e^{-j2\pi f t} \right]_{T/4-L/2}^{T/4+L/2}$$

$$= H_1(f) - \frac{E}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f (-\frac{T}{4} + \frac{L}{2})} - e^{-j2\pi f (-\frac{T}{4} - \frac{L}{2})} \right) + \frac{E}{j2\pi f} \left(e^{-j2\pi f (\frac{T}{4} + \frac{L}{2})} - e^{-j2\pi f (\frac{T}{4} - \frac{L}{2})} \right)$$

$$= H_1(f) - \frac{E}{j2\pi f} \left(e^{j\frac{\pi f T}{2}} e^{-j\pi f L} - e^{j\frac{\pi f T}{2}} e^{j\pi f L} - e^{-j\frac{\pi f T}{2}} e^{-j\pi f L} + e^{-j\frac{\pi f T}{2}} e^{j\pi f L} \right)$$

$$H_2(f) = H_1(f) + \frac{E}{j2\pi f} \left(e^{j\frac{\pi f T}{2}} 2j \sin(\pi f L) - e^{-j\frac{\pi f T}{2}} 2j \sin(\pi f L) \right)$$

$$= H_1(f) + \frac{E}{j2\pi f} 2j \sin(\pi f L) 2j \sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$$

$$H_2(f) = H_1(f) - \frac{2E}{j\pi f} \sin(\pi f L) \sin\left(\pi f \frac{T}{2}\right)$$

On vérifie bien que $H_2(0) = 0$

(3)

$$\text{Si } f = \frac{1}{T} \quad H_2\left(\frac{1}{T}\right) = H_1\left(\frac{1}{T}\right) - \frac{4ET}{j2\pi} \sin\left(\frac{\pi L}{T}\right) \sin\left(\frac{\pi T}{2T}\right)$$

$$= H_1\left(\frac{1}{T}\right) - \frac{2ET}{j\pi} \sin\left(\frac{\pi L}{T}\right) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$H_2\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{ET}{j\pi} - \frac{2ET}{j\pi} \sin\left(\frac{\pi L}{T}\right)$$

$$H_2\left(\frac{1}{T}\right) = \frac{ET}{j\pi} \left(1 - 2 \sin\left(\frac{\pi L}{T}\right)\right)$$

On peut faire varier $H_2\left(\frac{1}{T}\right)$ en faisant varier L

Exo 2 $T_e = \frac{1}{f_e} = \frac{1}{20} = \frac{5}{100} = 0,05 \text{ s}$

Donc les instants d'échantillonnage sont les multiples de T_e
donc les instants $t = nT_e = 0,05 \times n$

- Les valeurs possibles de $x[n]$ sont uniquement les multiples du pas de quantification, donc les valeurs $kq = 0,2 \times k$
- A chaque instant d'échantillonnage (donc à chaque multiple de T_e), on prend le multiple du pas de quantification le plus proche de $x(nT_e)$ au sens de l'arrondi

$$\text{Donc } x[n] = kq \text{ tel que } -\frac{q}{2} \leq x[n] - x(nT_e) < \frac{q}{2}$$

$$-\frac{q}{2} \leq kq - x(nT_e) < \frac{q}{2}$$

$$x(nT_e) - \frac{q}{2} \leq kq < x(nT_e) + \frac{q}{2}$$

$$\frac{x(nT_e)}{q} - \frac{1}{2} \leq k < \frac{x(nT_e)}{q} + \frac{1}{2}$$

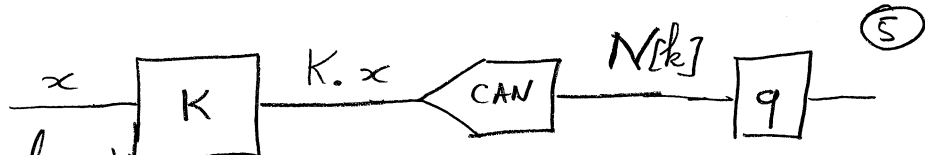
Sur le graphique, on peut voir qu'il y a au moins 15 valeurs de $x[n]$. Donc la sortie du CAN est codée sur 4 bits au moins

Exo 3

Pour que ce signal puisse être échantillonné à $F_e = 15 \text{ GHz}$, il faut vérifier 2 conditions (voir cours)

- a) Toute l'information contenue dans le signal doit être en dessous de $\frac{F_e}{2} = 7,5 \text{ GHz}$. Ici on vous dit que cette information se situe en dessous de 6 GHz , donc c'est bien le cas ici.
- b) Au delà de $\frac{F_e}{2}$, il ne doit y avoir aucune énergie en quantité importante (non négligeable). Sur le spectre, on peut voir qu'il y a une raie d'énergie comparable à l'information aux alentours de $8,3 \text{ GHz}$. On pourrait donc dire que la seconde condition n'est pas vérifiée à cause de cette raie. Mais $8,3 = 7,5 + 0,8$, donc cette raie se refléterait en $\frac{F_e}{2} - \Delta f = 7,5 - 0,8 = 6,7 \text{ GHz}$, donc à un endroit où on ira pas chercher de l'information. Puisque $6 = 7,5 - 1,5$, ce qui pose problème est ce qui se trouve au delà de $7,5 + 1,5 = 9 \text{ GHz}$. Or à près 9 GHz , on a au plus -90 dB , ce qui est très en dessous des raies portuses d'information. Donc en réalité il est parfaitement possible d'échantillonner ce signal à 15 GHz .

Exo 4



Si on amplifie le signal par K ,

la valeur maximale est multipliée par K

$$K \times x_{\max} = 0,867 \times 1,14 =$$

cette valeur est inférieure à 1 donc il n'y aura pas de problème de saturation

la valeur efficace sera elle aussi multipliée par K , donc

le rapport signal sur bruit passera de $RSB = \frac{12 V_{\text{eff}}^2}{q^2}$

à $RSB' = \frac{12 K^2 V_{\text{eff}}^2}{q^2}$, donc il sera augmenté

$$RSB'_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{K^2 12 V_{\text{eff}}^2}{q^2} \right) = 20 \log_{10}(K) + 10 \log_{10} \left(\frac{12 V_{\text{eff}}^2}{q^2} \right)$$

$$RSB'_{\text{dB}} = RSB_{\text{dB}} + 20 \log_{10}(1,14) = RSB_{\text{dB}} +$$

Si on amplifie le signal d'un facteur 1,2, la valeur maximale serait $1,2 \times 0,867 =$ cette valeur est supérieure à 1, donc on aurait de la saturation, donc le rapport signal sur bruit serait diminué (voir cours)

Exo 5 a) C est un système à temps continu (le temps t prend n'importe quelle valeur)

b) C'est un système à temps discret : les signaux d'entrée et de sortie sont des suites $x[n]$ et $y[n]$

c) Si on applique une impulsion à l'entrée $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$

On aura $y[0] = 0,9$ $y[1] =$

Devoir surveillé de Traitement des Signaux de Mesure

DUT MP - Semestre 4 - 2010/2011 - durée : 1 heure 45

Les cinq exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la qualité de la présentation des résultats. Si vous joignez cet énoncé à votre copie, indiquez ci-dessous votre nom, prénom et groupe.

nom, prénom	groupe

1. (5 points)

- Soit le système linéaire stationnaire dont la réponse impulsionnelle $h_1(t)$ est présentée figure 1.a. Ce système est-il causal ? Justifier votre réponse.
- Calculer la réponse fréquentielle $H_1(f)$ de ce système, c'est à dire la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle. Combien vaut $H_1(1/T)$?
- Soit le système linéaire stationnaire dont la réponse impulsionnelle $h_2(t)$ est présentée figure 1.b. Calculer $h_2(t) - h_1(t)$ et en déduire une expression de la réponse fréquentielle $H_2(f)$. Combien vaut $H_2(1/T)$?

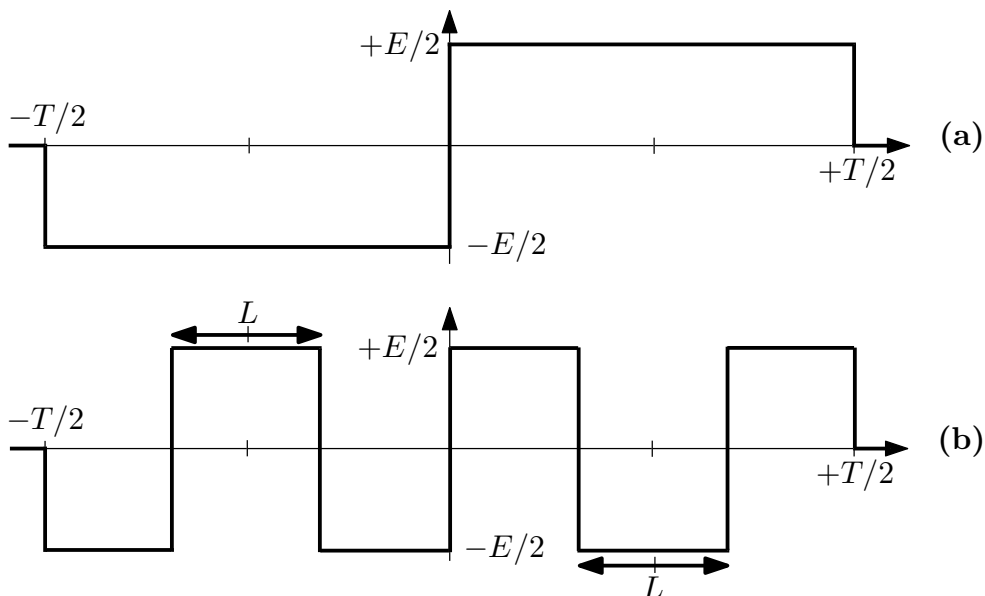


Figure 1: réponses impulsionnelles des systèmes étudiés dans l'exercice 1.

- (4 points) La figure 2 montre l'évolution d'un signal $x(t)$ en fonction du temps. L'objectif de cet exercice est de représenter sur cette figure le signal $x[n]$ obtenu en faisant l'acquisition du signal $x(t)$ à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique dont les caractéristiques sont les suivantes :

- fréquence d'échantillonnage $F_e = 20$ Hz ;
- quantification par arrondi avec un pas de quantification $q = 0.2$ V.

On supposera que l'acquisition commence à l'instant $t = 0$ s. Pour obtenir cette représentation, il vous est demandé de procéder de la manière suivante :

- Calculer la période d'échantillonnage, puis indiquer sur la figure les instants d'échantillonnage par des droites verticales parallèles tracées sur toute la hauteur de la figure et dont les abscisses correspondent aux instants d'échantillonnage successifs ;
- Déterminer les valeurs possibles de $x[n]$ après la conversion analogique-numérique, puis indiquer ces valeurs possibles sur la figure par des droites horizontales parallèles tracées sur toute la longueur de la figure et dont les ordonnées correspondent à ces valeurs possibles ;
- Indiquer enfin distinctement les points d'intersection de ces droites horizontales et verticales qui correspondent à un échantillonnage et à une quantification par arrondi du signal.

Montrer enfin que l'entier obtenu à la sortie du convertisseur analogique-numérique est codé sur au moins 4 bits.

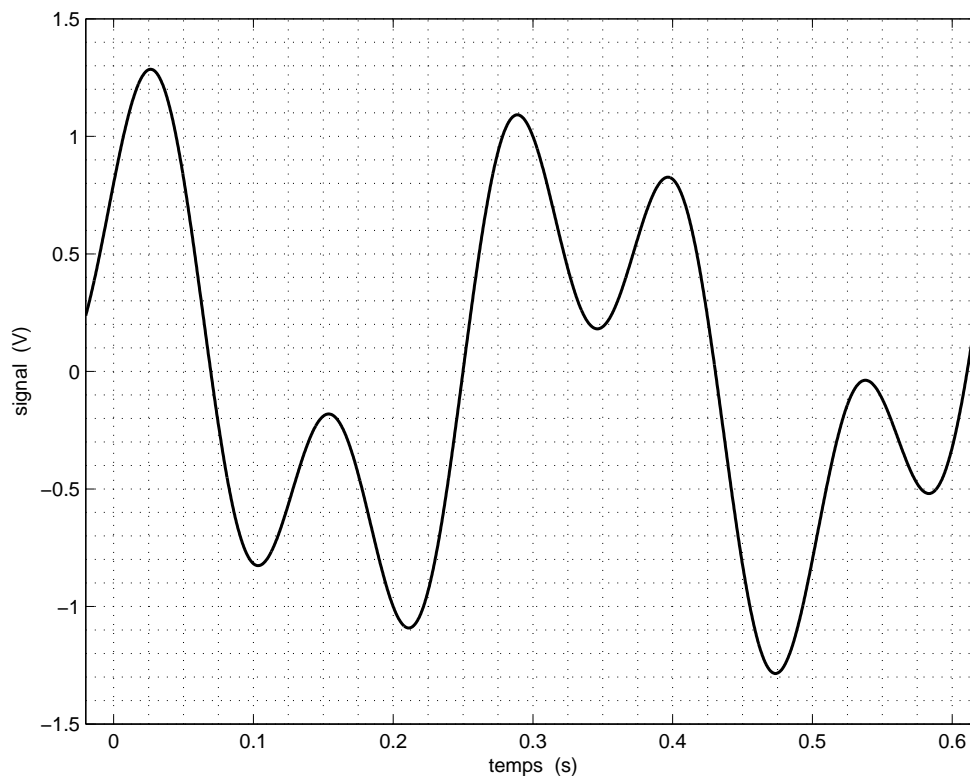


Figure 2: signal étudié dans l'exercice 2.

3. **(3 points)** La figure 3 montre la représentation fréquentielle d'un signal fourni par un système de transmission de données sur un réseau de téléphonie mobile¹. L'information transmise par ce signal se situe à des fréquences inférieures à 6 GHz.

Au vu de cette représentation fréquentielle, est-il possible d'échantillonner correctement ce signal à 15 GHz ? En cas de réponse négative, indiquer clairement ce qui risque de se produire si ce signal est échantillonné à cette fréquence et quelles solutions il vous paraît possible de mettre en œuvre pour échantillonner correctement le signal à cette cadence.

4. **(4 points)** La figure 4 montre l'évolution en fonction du temps d'un signal acquis à l'aide d'un convertisseur analogique-numérique acceptant en entrée des tensions comprises entre -1.0 et $+1.0$ V. La valeur maximale de la valeur absolue de ce signal est égale à 0.867 V. Si avant la conversion analogique-numérique, le signal est amplifié avec un amplificateur de gain 1.14 , l'acquisition sera-t-elle meilleure ? Comment évoluera le rapport signal sur bruit de quantification ? On exprimera la variation du rapport signal sur bruit de quantification en dB. Serait-il envisageable d'amplifier le signal avec un gain de 1.2 ? Justifiez précisément votre réponse.

¹J'adresse mes remerciements à M. Bruno Feuvrie, qui a bien voulu me fournir le signal à partir duquel a été calculée cette analyse spectrale.

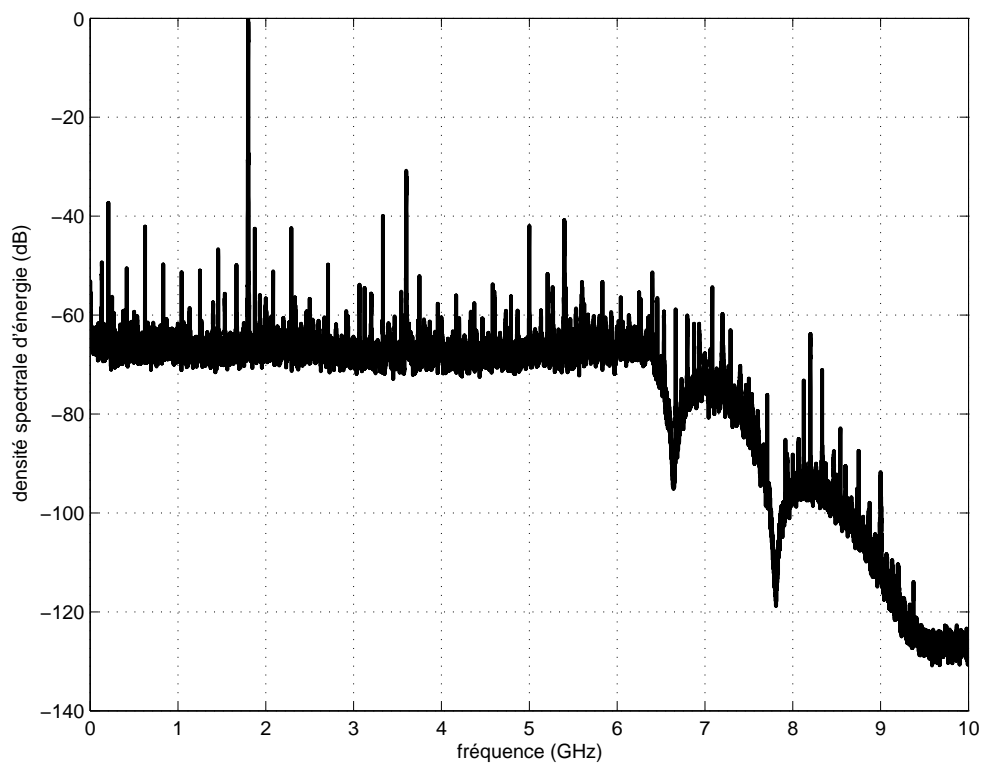


Figure 3: représentation fréquentielle du signal étudié dans l'exercice 3.

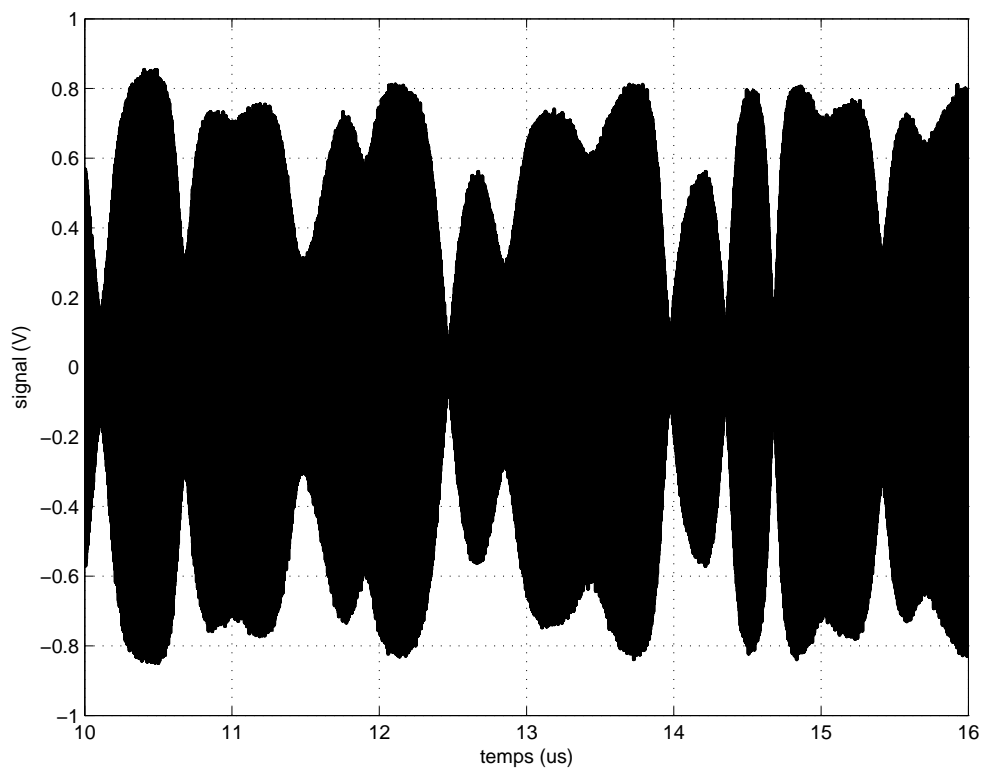


Figure 4: représentation temporelle du signal étudié dans l'exercice 4.

5. (4 points)

- Le système qui fabrique un signal $y(t)$ à partir du signal $x(t)$ par la relation

$$y(t) = \int_0^{+\infty} e^{-3\tau} x(t - \tau) d\tau$$

est-il à temps continu ou à temps discret ?

- Le système qui fabrique un signal $y[n]$ à partir du signal $x[n]$ par la relation

$$y[n] = 1.2x[n] + 0.9x[n-1] + 0.6x[n-2] + 0.3x[n-3]$$

est-il à temps continu ou à temps discret ?

- Le système qui fabrique un signal $y[n]$ à partir du signal $x[n]$ par la relation

$$y[n] = -y[n-1] + 0.9x[n] + 0.1x[n-1] + 0.9x[n-2]$$

est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Quel est son gain statique ? Quelle est l'expression de sa réponse fréquentielle ?

Justifiez vos réponses.