Correction DS Traitement du signal, 1er avril 2010 ①

F. Auger, 1/04/2010

exercice 1

a) $$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$\frac{dX}{df}(f) = \frac{d}{df}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{df}\left(x(t)\, e^{-j2\pi f t}\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, \frac{d}{df}\left(e^{-j2\pi f t}\right) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\; -j2\pi t\; e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= -j2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

De même $$\frac{d^2X}{df^2}(f) = -j2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\, \frac{d}{df}\left(e^{-j2\pi f t}\right) dt$$

$$= -j2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\left(-j2\pi t\right) e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= (-j2\pi)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

$$= -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

Donc $$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = -\frac{1}{j2\pi}\, \frac{dX}{df}(f)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\, x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = -\frac{1}{4\pi^2}\, \frac{d^2X}{df^2}(f)$$

b) $$Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2T^2}}\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, e^{-j2\pi f T u}\, du \times T$$

$u = \frac{t}{T}$ $\quad t = uT$, $\quad dt = T\,du$

$$= T\, X(fT)$$

$$= \sqrt{2\pi T^2}\, e^{-2\pi^2 f^2 T^2}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,T^3}\left(e^{-\frac{t^2}{2T^2}} - \frac{t^2}{T^2}e^{-\frac{t^2}{2T^2}}\right)$$

Donc $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,T^3}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2T^2}}e^{-j2\pi ft}dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t^2}{T^2}e^{-\frac{t^2}{2T^2}}e^{-j2\pi ft}dt\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,T^3}\left(Y(f) + \frac{1}{4\pi^2T^2}\frac{d^2Y}{df^2}(f)\right)$$

$Y(f) = \sqrt{2\pi T^2}\, e^{-2\pi^2f^2T^2}$

$\frac{dY}{df}(f) = \sqrt{2\pi} \times T \times -2\pi^2T^2 \times 2f\, e^{-2\pi^2f^2T^2}$

$= -\sqrt{2\pi}\,4\pi^2T^3\, f e^{-2\pi^2f^2T^2}$

$\frac{d^2Y}{df^2}(f) = -\sqrt{2\pi}\,4\pi^2T^3\left(e^{-2\pi^2f^2T^2} + f \times -2\pi^2T^2\,2f\, e^{-2\pi^2f^2T^2}\right)$

$= -\sqrt{2\pi}\,4\pi^2T^3\left(e^{-2\pi^2f^2T^2} - 4\pi^2T^2f^2e^{-2\pi^2f^2T^2}\right)$

$\frac{1}{4\pi^2T^2}\frac{d^2Y}{df^2}(f) = \underbrace{-\sqrt{2\pi}\,T\,e^{-2\pi^2f^2T^2}}_{-Y(f)} + \sqrt{2\pi}\,T\,4\pi^2T^2f^2e^{-2\pi^2f^2T^2}$

donc $Y(f) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\,\cancel{T^3}}\cancel{\sqrt{2\pi}}\,4\pi^2\cancel{T^3}f^2e^{-2\pi^2f^2T^2} = 4\pi^2f^2e^{-2\pi^2f^2T^2}$

$h(t)$ est en s^{-3}, c'est normal que $H(f)$ soit en s^{-2}

2) Le signal comporte principalement des signaux périodiques c'est à dire une somme de sinusoïdes de fréquences multiples d'une fréquence fondamentale (décomposition en série de Fourier)
Pour pouvoir échantillonner ces signaux à 140 Hz, il faudrait respecter deux conditions (voir cours)

1) Toute l'information doit être en dessous de $Fe/2 = 70$ Hz
2) Aucune énergie non négligeable au dessus de $Fe/2 = 70$ Hz

Sur les deux spectres, une raie à 80Hz est clairement visible. Son niveau d'énergie est égal ou supérieur au niveau d'énergie présent à 60Hz, fréquence où cette raie viendrait se replier si on échantillonnait ce signal à 140Hz. Donc la 2ème condition n'est pas respectée. Si on échantillonne ces signaux à 140 Hz, les raies à 80 et 90Hz se replieront à 60 et 50 Hz, et viendront déformer la partie intéressante du signal. Si il est absolument nécessaire d'échantillonner ces signaux à 140Hz il faut utiliser un filtre anti-repliement avec une fréquence de coupure à environ 70Hz.

3) Ce signal est échantillonné = il correspond à la température maximale obtenue chaque jour (quotidiennement)
Il est visiblement quantifié = il ne peut prendre que des valeurs qui sont des multiples d'un pas de quantification élémentaire, ce qui fait que le signal est constant par morceaux.
Malgré tout, les fluctuations du signal sont assez importantes par rapport au pas de quantification, ce qui rend ce signal tout juste acceptable.

Un signal quantifié provient presque toujours d'un convertisseur analogique-numérique, qui travaille forcément en échantillonné. Un signal quantifié est donc presque toujours échantillonné.

b) Entre la température minimale 15,5°C et la température maximale 33,9°C il y a 33 pas de quantification donc $q = (33,9 - 15,5)/33 = 0,55°C$
Si la température est considérée comme sinusoïdale, l'amplitude de ses fluctuations est $(33,9 - 15,5)/2 = 9,2°C$
Donc la valeur efficace de ses fluctuations est $9,2/\sqrt{2} = 6,5°C$

Donc le rapport signal sur bruit de quantification est

$$RSB_q = \frac{12 V_{eff}^2}{q^2} = 1633 \qquad 10 \log_{10}(RSB_q) = 32\ dB$$

c'est très faible, tout juste acceptable...

exo 4

Si $x[n]$ est constant $x(n) = x_0$ (statique)

$$y[n] = h_0 x_0 + h_1 x_0 + h_2 x_0 + h_1 x_0 + h_0 x_0$$
$$= (2h_0 + 2h_1 + h_2)\, x_0$$

$$\boxed{\text{Donc } y[n] = 0 \iff 2h_0 + 2h_1 + h_2 = 0}$$

Si $x[n]$ est linéairement croissant $x(n) = V_0 T_e\, n$

$$y[n] = V_0 T_e \left[h_0 n + h_1(n-1) + h_2(n-2) + h_1(n-3) + h_0(n-4) \right]$$
$$= V_0 T_e \left[(2h_0 + 2h_1 + h_2)\, n - h_1 - 2h_2 - 3h_1 - 4h_0 \right]$$
$$= V_0 T_e \left[(2h_0 + 2h_1 + h_2)\, n - (4h_0 + 4h_1 + 2h_2) \right]$$

Donc $y[n] = 0 \iff 2h_0 + 2h_1 + h_2 = 0$ $\underline{\underline{\text{et}}}$ $4h_0 + 4h_1 + 2h_2 = 0$

$\boxed{2h_0 + 2h_1 + h_2 = 0}$
c'est la même condition

Si $x[n]$ est parabolique $x[n] = \frac{1}{2} \gamma_0 T_e^2 n^2$

$$y[n] = \frac{1}{2} \gamma_0 T_e^2 \left[h_0 n^2 + h_1(n-1)^2 + h_2(n-2)^2 + h_1(n-3)^2 + h_0(n-4)^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} \gamma_0 T_e^2 \left[h_0 n^2 + h_1(n^2 - 2n + 1) + h_2(n^2 - 4n + 4) + h_1(n^2 - 6n + 9) + h_0(n^2 - 8n + 16) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \gamma_0 T_e^2 \left[n^2 (2h_0 + 2h_1 + h_2) - n(2h_1 + 4h_2 + 6h_1 + 8h_0) + (h_1 + 4h_2 + 9h_1 + 16h_0) \right]$$
$$= \frac{1}{2} \gamma_0 T_e^2 \left[(2h_0 + 2h_1 + h_2)\, n^2 - n(8h_0 + 8h_1 + 4h_2) + (16h_0 + 10h_1 + 4h_2) \right] = \gamma_0 T_e^2$$

donc $y[n] = \gamma_0 T_e^2 \iff 2h_0 + 2h_1 + h_2 = 0$ et $\boxed{8h_0 + 5h_1 + 2h_2 = 1}$

Si $x[n] = \frac{1}{6} J_0 T_e^3 n^3$ alors

$$y[n] = \frac{1}{6} J_0 T_e^3 \left(h_0 n^3 + h_1(n-1)^3 + h_2(n-2)^3 + h_1(n-3)^3 + h_0(n-4)^3 \right)$$

$$(n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$
$$(n-2)^3 = n^3 - 6n^2 + 12n - 8$$
$$(n-3)^3 = n^3 - 9n^2 + 27n - 27$$
$$(n-4)^3 = n^3 - 12n^2 + 48n - 64$$

$$y[n] = \frac{1}{6} j_0 T_e^3 \Big[h_0 (2n^3 - 12n^2 + 48n - 64) + h_1 (2n^3 - 12n^2 + 30n - 28) + h_2 (n^3 - 6n^2 + 12n - 8) \Big]$$

$$= \frac{1}{6} j_0 T_e^3 \Big[n^3 (2h_0 + 2h_1 + h_2) - 6n^2 (2h_0 + 2h_1 + h_0) + 6n (8h_0 + 5h_1 + 2h_2) - 4 (16h_0 + 7h_1 + 2h_2) \Big]$$

Donc $y[n] = j_0 T_e^3 n \iff 16h_0 + 7h_1 + 2h_2 = 0$

e) h_0, h_1 et h_2 sont donc solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2h_0 + 2h_1 + h_2 = 0 \\ 8h_0 + 5h_1 + 2h_2 = 1 \\ 16h_0 + 7h_1 + 2h_2 = 0 \end{cases}$$

Si maintenant $x[n] = x_0 + v_0 T_e n + \frac{\gamma_0 T_e^2}{2} n^2 + \frac{j_0 T_e^3}{6} n^3$

alors $y[n] = 0 + 0 + \gamma_0 T_e^2 + j_0 T_e^3 n$

par application du principe de superposition car ce filtre est linéaire.

Université de Nantes - IUT de Saint Nazaire

Département de Mesures Physiques

Devoir surveillé de Traitement des Signaux de Mesure

DUT MP - Semestre 4 - 2009/2010 - durée : 1 heure 45

> Les quatre exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la qualité de la présentation des résultats.

1. **(6 points)**

   (a) Rappeler la définition de la transformée de Fourier $X(f)$ d'un signal $x(t)$. Montrer que $\frac{dX}{df}(f)$ et $\frac{d^2X}{df^2}(f)$ sont, à des facteurs multiplicatifs près que l'on déterminera, les transformées de Fourier de $t\,x(t)$ et $t^2\,x(t)$.

   (b) La transformée de Fourier de $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ est $X(f) = \sqrt{2\pi}\,e^{-2\pi^2 f^2}$. À l'aide d'un changement de variable, en déduire l'expression de la transformée de Fourier de $y(t) = e^{-\frac{t^2}{2T^2}}$, T étant un paramètre réel positif caractéristique de $y(t)$.

   (c) À l'aide des deux questions précédentes, calculer la transformée de Fourier de l'*ondelette de Ricker* (également appelée *"mexican hat"*, voir figure 1), définie par

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,T^3}\left(1 - \frac{t^2}{T^2}\right) e^{-\frac{t^2}{2T^2}}$$

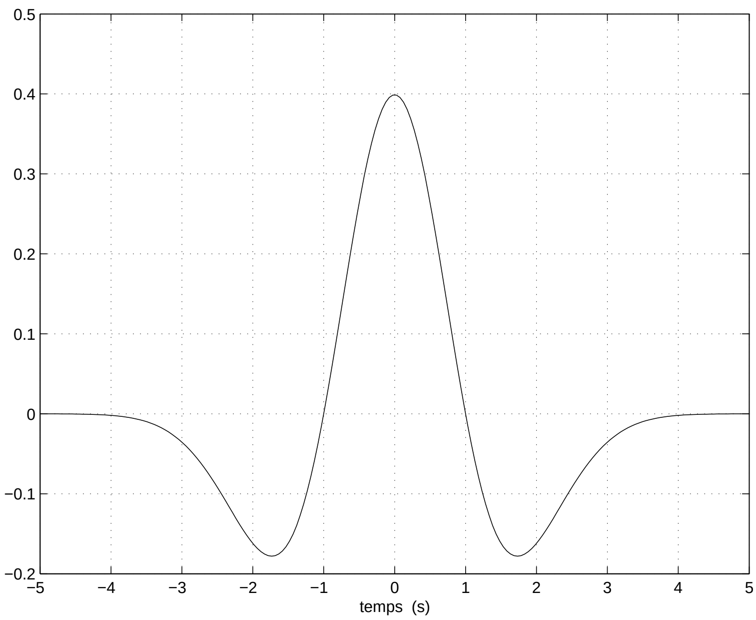

Figure 1: représentation graphique de l'ondelette de Ricker (avec $T = 1$) étudiée dans l'exercice 1.

2. **(5 points)** La figure 2 montre les représentations fréquentielles de deux courants électriques consommés par un moteur asynchrone en rotation. Ces deux courants comportent principalement des signaux périodiques.

   Au vu de ces repésentations fréquentielles, est-il possible d'échantillonner correctement ces signaux à 140 Hz ? En cas de réponse négative, indiquer clairement ce qui risque de se produire si ces signaux sont

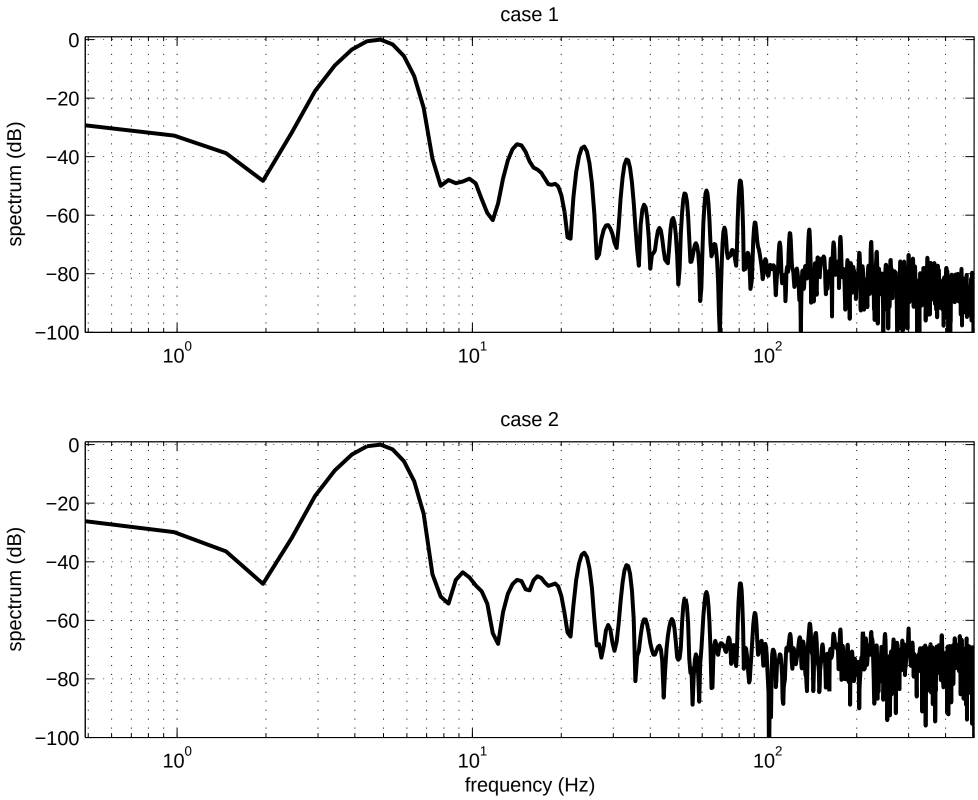

Figure 2: représentations fréquentielles de deux signaux étudiés dans l'exercice 2.

échantillonnés à cette fréquence et quelles solutions concrètes il vous parait possible de mettre en œuvre pour échantillonner correctement ces signaux à cette cadence.

3. **(4 points)** La figure 3 montre l'évolution de la température quotidienne maximale, enregistrée à Houston (Texas, USA) pendant un an (du 1er janvier au 31 décembre) avec un équipement informatique[1].

   (a) Ce signal est-il échantillonné ? Est-il quantifié ? Ce signal vous parait-il exploitable ?

   (b) La température sera considérée comme un signal sinusoïdal. Déduire de la figure 3 la valeur du pas de quantification, la valeur efficace du signal et enfin la valeur du rapport signal sur bruit de quantification.

4. **(5 points)** Un système élabore un signal $y[n]$ à partir d'un autre signal $x[n]$ par une relation de la forme

$$y[n] = h_0\, x[n] + h_1\, x[n-1] + h_2\, x[n-2] + h_1\, x[n-3] + h_0\, x[n-4]$$

   (a) Quelle relation doivent vérifier les coefficients h_0, h_1 et h_2 pour que $y[n]$ soit toujours nul quand $x[n]$ est un signal constant, du type $x[n] = x_0$?

   (b) Quelle relation *supplémentaire* doivent vérifier les coefficients h_0, h_1 et h_2 pour que $y[n]$ soit toujours nul quand $x[n]$ est un signal linéaire, du type $x[n] = v_0\, T_e\, n$?

   (c) Quelle relation *supplémentaire* doivent vérifier les coefficients h_0, h_1 et h_2 pour que $y[n]$ soit toujours égal à $\gamma_0\, T_e^2$ quand $x[n]$ est un signal parabolique, du type $x[n] = \frac{\gamma_0\, T_e^2}{2}\, n^2$?

   (d) Quelle relation *supplémentaire* doivent vérifier les coefficients h_0, h_1 et h_2 pour que $y[n]$ soit égal à $j_0\, T_e^3\, n$ quand $x[n]$ est égal à $x[n] = \frac{j_0\, T_e^3}{6}\, n^3$?

   (e) En déduire les valeurs de h_0, h_1 et h_2. Que vaut alors le signal $y[n]$ lorsque $x[n] = x_0 + v_0\, T_e\, n + \frac{\gamma_0\, T_e^2}{2}\, n^2 + \frac{j_0\, T_e^3}{6}\, n^3$?

[1]Source : Don Johnson, "Frequency Domain Problems", `http://cnx.org`

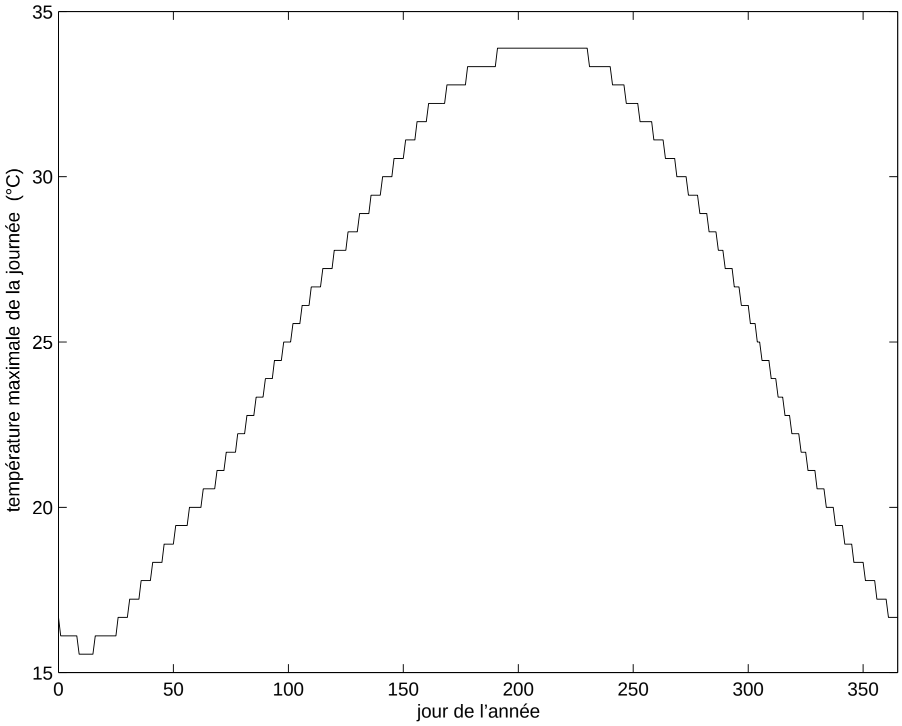

Figure 3: représentation temporelle du signal étudié dans l'exercice 3.