Exercice 1

a) Ce système n'est pas causal car sa réponse impulsionnelle $h_T(t)$ n'est pas causale : elle n'est pas nulle aux instants négatifs.

b) $H_T(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_T(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j2\pi ft}\, dt = -\frac{1}{j2\pi fT}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/2}^{T/2}$

$$= -\frac{e^{-j\pi fT} - e^{j\pi fT}}{j2\pi fT} = \frac{2j\sin(\pi fT)}{2j\,\pi fT} = \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

On vérifie que $h_T(t)$ étant en s^{-1}, $H_T(f)$ est sans dimension.

c) $h(t) = \alpha\left(h_{T_1}(t) - h_{T_2}(t)\right)$ donc $H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-j2\pi ft}\, dt = \alpha\left(H_{T_1}(f) - H_{T_2}(f)\right)$

Au voisinage de 0 $\frac{\sin(x)}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6}$, donc en basse fréquence

$$H(f) \approx \alpha\left(1 - \frac{(\pi f T_1)^2}{6} - 1 + \frac{(\pi f T_2)^2}{6}\right) = \alpha\,\frac{\pi^2 f^2 (T_2^2 - T_1^2)}{6}$$

On souhaiterait que $H(f) \approx (j2\pi f)^2 = -4\pi^2 f^2$

ce qui conduit à $-4\pi^2 = \alpha\,\frac{\pi^2 (T_2^2 - T_1^2)}{6}$

soit $\alpha = \frac{24}{T_1^2 - T_2^2}$

$H_{T_1}(f)$ et $H_{T_2}(f)$ étant sans dimension, pour que $\alpha\left(H_{T_1}(f) - H_{T_2}(f)\right)$ soit approximativement égal à $-4\pi^2 f^2$ en basse fréquence, il faut que α soit en s^{-2}. C'est bien le cas.

Exercice 2

$$\begin{array}{r} 13,75 \\ +\ 13,75 \\ \hline 27,50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 27,50 \\ +\ 13,75 \\ \hline 41,25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 41,25 \\ 13,75 \\ \hline 55,00 \end{array}$$

a) $F_e = 13,75$ Hz

$f_0 = 50$ Hz $= 3 \cdot F_e + 8,75$

Donc après échantillonnage, f_0 sera vue de la même manière qu'une sinusoïde de fréquence $f_0' = 8,75$ Hz (translation fréquentielle)

$\frac{F_e}{2} = \frac{13,75}{2} = 6,5 + 0,375 = 6,875$ Hz

$f_0 > \frac{F_e}{2}$ donc cette fréquence subit aussi un repliement spectral :

$f_0' = 8,75 = 6,875 + 1,875 = \frac{F_e}{2} + \Delta f$

$$\begin{array}{r} 8,750 \\ -\ 6,875 \\ \hline 1,875 \end{array}$$

Donc après échantillonnage, f_0 sera vue de la même manière qu'une sinusoïde de fréquence $\frac{F_e}{2} - \Delta f = \underline{5\text{ Hz}}$

b) Si $f_0 = 60$ Hz, alors $f_0 = 4F_e + 5$, donc après échantillonnage, f_0 sera vue de la même manière qu'une sinusoïde de fréquence $f_0' = \underline{5\text{ Hz}}$ (translation fréquentielle)

c) Si $F_e = 27,5$ Hz alors $F_e/2 = 13,75$

$50 = 27,5 + 22,5$, $22,5 = 13,75 + 8,75 = \frac{F_e}{2} + \Delta f$

$13,75 - 8,75 = \frac{F_e}{2} - \Delta f = \underline{5\text{ Hz}}$

$60 = 55 + 5 = 2F_e + 5$ donc par translation fréquentielle, 60 Hz devient $\underline{5\text{ Hz}}$

Si $F_e = 55$ Hz, $F_e/2 = 27,5$ Hz

donc $50 = 27,5 + 22,5 = \frac{F_e}{2} + \Delta f \rightarrow \frac{F_e}{2} - \Delta f = 27,5 - 22,5 = \underline{5\text{ Hz}}$

$60 = 55 + 5 = F_e + f_0' \rightarrow f_0' = \underline{5\text{ Hz}}$

Donc pour des fréquences d'échantillonnage de 13,75, 27,5 ou 55 Hz des sinusoïdes de fréquence 50 ou 60 Hz sont toujours altérées en $\underline{5\text{ Hz}}$

d) Si les 4 filtres sont placés en série $H_2(f) = (H_1(f))^4$

$H_1(f)$ étant un filtre moyenneur d'ordre 11, il a un zéro à la fréquence $\lambda = \frac{1}{11}$ (comme on l'a vu en TD)

$\lambda = \frac{f}{Fe} = \frac{1}{11}$ correspond à $f = \frac{Fe}{11} = \frac{55}{11} = \underline{5\ Hz}$

Donc le filtre <u>rejette</u> les composantes sinusoïdales à 5 Hz, donc les "bruits" dûs à l'alimentation de la chaîne de mesure sont le secteur sont <u>supprimés</u> par ce filtre

Si on ne prend qu'un point sur 4 après filtrage, la période d'échantillonnage est multipliée par 4, et la fréquence

d'échantillonnage est <u>divisée</u> par 4. donc $Fe' = \frac{Fe}{4} = 13{,}75\ Hz$.

On peut voir qu'au delà d'une fréquence normalisée de 0,25, le gain est au maximum de -78 dB, ce qui correspond environ à une division par 10 000 des composantes du signal situées au delà de $\frac{Fe}{4} = 13{,}75\ Hz$. Le filtre $H_2(\lambda)$ qui permet donc à la condition de Shannon d'être vérifiée, sert donc à la fois de filtre anti-repliement et de filtre réjecteur du 5 Hz (provenant du 50 ou du 60 Hz)
C'est une belle astuce!

e) Par définition $q_{th} = \frac{\Delta V}{2^n}$

f) $q_{eff} = \frac{\Delta V}{2^{n_{eff}}}$ donc $\frac{q_{eff}}{q_{th}} = \frac{\Delta V}{2^{n_{eff}}} \frac{2^n}{\Delta V} = 2^{(n - n_{eff})} = \underline{2^{0,1}}$

$RSB_q = \frac{V_{eff}^2}{q^2/12}$ donc $RSB_{q_{eff}} = \frac{12 V_{eff}^2}{q_{eff}^2} = \frac{12 V_{eff}^2}{q_{th}^2} \times \frac{q_{th}^2}{q_{eff}^2} = RSB_{q_{th}} / 2^{0,2}$

donc $RSB^{dB}_{q_{eff}} = RSB^{dB}_{q_{th}} - 10 \log_{10}(2^{0,2}) = RSB^{dB}_{q_{th}} - 2 \log_{10}(2)$

$= RSB^{dB}_{q_{th}} - \underline{0{,}6\ dB}$

Le RSB_q^{dB} varie de 6 dB/bit. Si on perd 0,1 bit, on perd 0,6 dB !

exo 3 Pour pouvoir échantillonner ce signal à $Fe = 41$ kHz, il faut vérifier 2 conditions

- aucune information au delà de $\frac{Fe}{2} = 20{,}5$ kHz
- aucune énergie non négligeable au delà de $\frac{Fe}{2} = 20{,}5$ kHz

Aucune de ces deux conditions ne semble vérifiée sur le spectre du signal. Il ne serait donc pas correct d'échantillonner ce signal à cette cadence.

On peut voir qu'on a 11 raies entre 5 kHz et 20 kHz, l'écart entre les raies est donc de $\frac{15}{11}$ kHz

donc la 1ère raie au delà de $\frac{Fe}{2}$ est $20 + \frac{15}{11}$ kHz elle va se replier en $\frac{Fe}{2} - \Delta f$, ainsi que toutes les fréquences suivantes

Si on souhaite vraiment échantillonner ce signal à 41 kHz, il faut utiliser un filtre anti-repliement

exo 4

$$y[n] = h_0\, x[n] + h_1\, x[n-1] + h_2\, x[n-2]$$

- En statique $x(n) = X$ $\quad y(n) = Y = h_0 X + h_1 X + h_2 X = (h_0 + h_1 + h_2) X$

  donc $G_0 = h_0 + h_1 + h_2 = \frac{Y}{X}$

- A la fréquence de Nyquist $\left(\lambda = \frac{1}{2}\right)$, $x[n] = (-1)^n X$ et $y[n] = (-1)^n Y$

  donc $x[n-1] = -x(n)$ $\quad x[n-2] = x[n]$

  donc $y[n] = (h_0 - h_1 + h_2)\, x(n)$ $\quad G_N = \frac{y(n)}{x(n)} = h_0 - h_1 + h_2$

sur la 1ère figure, on est en statique, on en déduit que $G_0 = \frac{9}{1} = 9$

sur la 2ème figure, $x(n)$ et $y(n)$ sont des suites alternées, on en déduit que

$$G_N = \frac{3}{1} = 3$$

sur la 3ème figure $x[n]$ est périodique et prend des valeurs successives

0, 1, 1, 0, 1, 1, ...

donc $h_0 + h_1 = 8$ $\quad h_1 + h_2 = 4$ $\quad h_0 + h_2 = 6$ $\quad$ on en déduit $\underline{h_0 = 5}$ $\quad \underline{h_1 = 3}$ $\quad \underline{h_2 = 1}$

Université de Nantes - IUT de Saint Nazaire

Département de Mesures Physiques

Devoir surveillé de Traitement des Signaux de Mesure

DUT MP - Semestre 4 - 2008/2009 - durée : 1 heure 45

Les quatre exercices sont indépendants. La notation tiendra compte de la qualité de la présentation des résultats.

1. **(6 points)** Soit le système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle

$$h_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

T étant un paramètre réel positif caractéristique du système.

   (a) Ce système est-il causal ? Justifier votre réponse.

   (b) Calculer la réponse fréquentielle de ce système, c'est à dire la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle.

   (c) Soit le système linéaire stationnaire de réponse impulsionnelle $h(t) = \alpha\ (h_{T_1}(t) - h_{T_2}(t))$, avec $T_1 \neq T_2$. Que vaut sa réponse fréquentielle $H(f)$? Sachant que, au voisinage de zéro,

$$\frac{\sin(x)}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{6},$$

   calculer α pour que, en basse fréquence, $H(f) \approx -4\pi^2 f^2$. Le système approxime alors un opérateur de double dérivation.

2. **(6 points)** Le circuit `MCP3551` de MICROCHIP est un convertisseur analogique-numérique Delta-Sigma ayant une résolution de 22 bits. La fréquence d'échantillonnage de ce convertisseur est de $F_e = 13.75$ Hz.

   (a) Si le signal à convertir comporte une composante sinusoïdale de fréquence 50 Hz, à quelle fréquence cette sinusoïde sera présente dans le signal échantillonné ?

   (b) Si le signal à convertir comporte une composante sinusoïdale de fréquence[1] 60 Hz, à quelle fréquence cette sinusoïde sera présente dans le signal échantillonné ?

   (c) Que deviennent les deux résultats précédents si $F_e = \frac{55}{2} = 27.5$ Hz ou si $F_e = 55$ Hz ?

   (d) Dans ce circuit, le signal est d'abord échantillonné à la fréquence $F_e = 55$ Hz. Il est ensuite filtré à l'aide de quatre filtres identiques de même réponse fréquentielle $H_1(\lambda)$, placés en série (l'un après l'autre). Quelle est l'expression de la réponse fréquentielle $H_2(\lambda)$ de cet ensemble de 4 filtres[2] ? Quelle est la particularité des filtres $H_1(\lambda)$ et $H_2(\lambda)$ visible sur les figures 2.a et 2.c, qui permet de résoudre les problèmes évoqués dans les questions 1, 2 et 3, et donc d'obtenir des signaux de mesure faiblement bruités ? À la sortie du filtre $H_2(\lambda)$, on ne conserve qu'un échantillon sur quatre. Quelle est la fréquence d'échantillonnage du nouveau signal ? Le filtre $H_2(\lambda)$ permet-il de vérifier la condition de Shannon ?

   (e) Quelle est l'expression théorique du pas de quantification q_{th} en fonction de la largeur de l'intervalle des tensions d'entrée admissibles ΔV et du nombre de bits n du convertisseur ?

[1] La fréquence du réseau de distribution électrique des pays européens est de 50 Hz. Celle des pays américains est de 60 Hz.

[2] Les quatre filtres sont des filtres moyenneurs d'ordre 11. Le filtre H_2 résultant est appelé *sinc4 filter* dans la littérature anglosaxone.

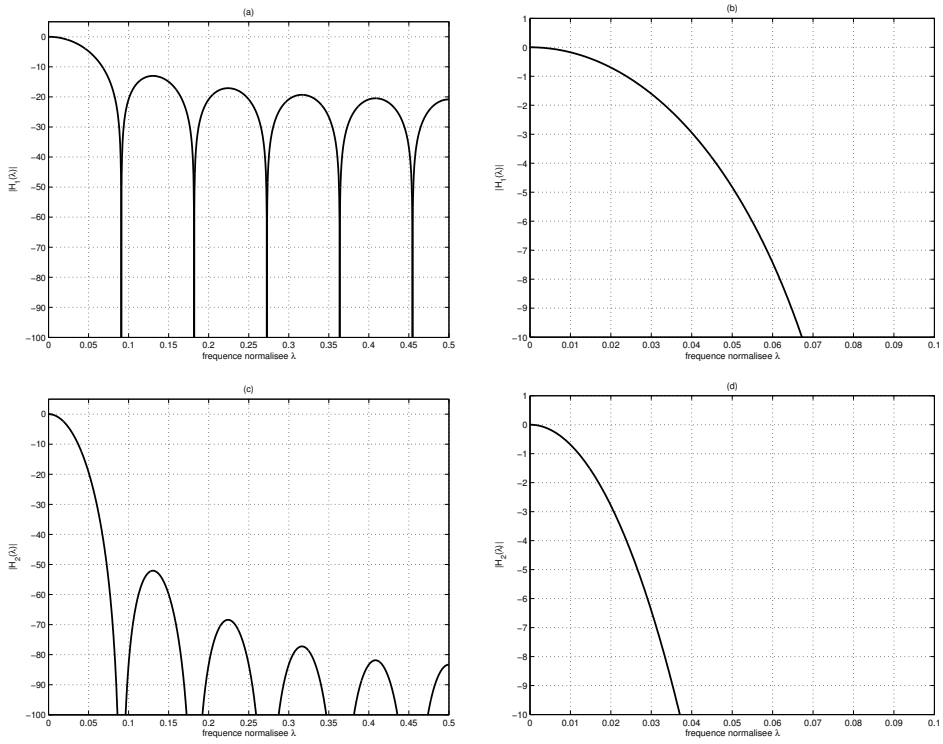

Figure 1: Représentation en fonction de la fréquence normalisée $\lambda = f\,T_e = f/F_e$ du module (en dB) des réponses fréquentielles des filtres $H_1(\lambda)$ (figures a et b) et $H_2(\lambda)$ (figures c et d) étudiés dans l'exercice 2. Les graphes b et d permettent de mieux voir le comportement en basse fréquence de ces filtres.

(f) Du fait des défauts du convertisseur, la largeur moyenne réelle q_{eff} de l'intervalle de tension conduisant à un entier donné à la sortie du convertisseur est plus grande que q_{th}. Elle est exprimée à l'aide d'un *nombre de bits effectifs* n_{eff} tel que q_{eff} se déduit de n_{eff} par une relation semblable à la relation de la question précédente. La notice technique de ce composant indique que son nombre de bits effectifs est de 21.9 bits. En déduire la valeur du rapport $q_{\text{eff}}/q_{\text{th}}$. Du fait des défauts de ce convertisseur, de combien est réduit le rapport signal sur bruit de quantification (exprimé en dB) ?

3. **(4 points)** La figure 2 montre la représentation fréquentielle d'un signal acquis lors de l'observation d'un phénomène physique. Le signal observé peut être considéré comme une somme de composantes sinusoïdales de fréquences multiples d'une fréquence fondamentale.

   Au vu de cette repésentation fréquentielle, est-il possible d'échantillonner correctement ce signal à 41 kHz ? En cas de réponse négative, indiquer *clairement* et *précisément* ce qui risque de se produire si ce signal est échantillonné à cette fréquence et quelles solutions il vous parait possible de mettre en œuvre pour échantillonner correctement le signal à cette cadence.

4. **(4 points)** Un système élabore un signal $y[n]$ à partir d'un autre signal $x[n]$ par une relation de la forme $y[n] = h_0\,x[n] + h_1\,x[n-1] + h_2\,x[n-2]$.

   (a) Calculer le gain statique et le gain de Nyquist de ce système.

   (b) La figure 3 montre les réponses de ce système à trois signaux d'excitation $x[n]$ différents. En déduire les valeurs de h_0, h_1 et h_2.

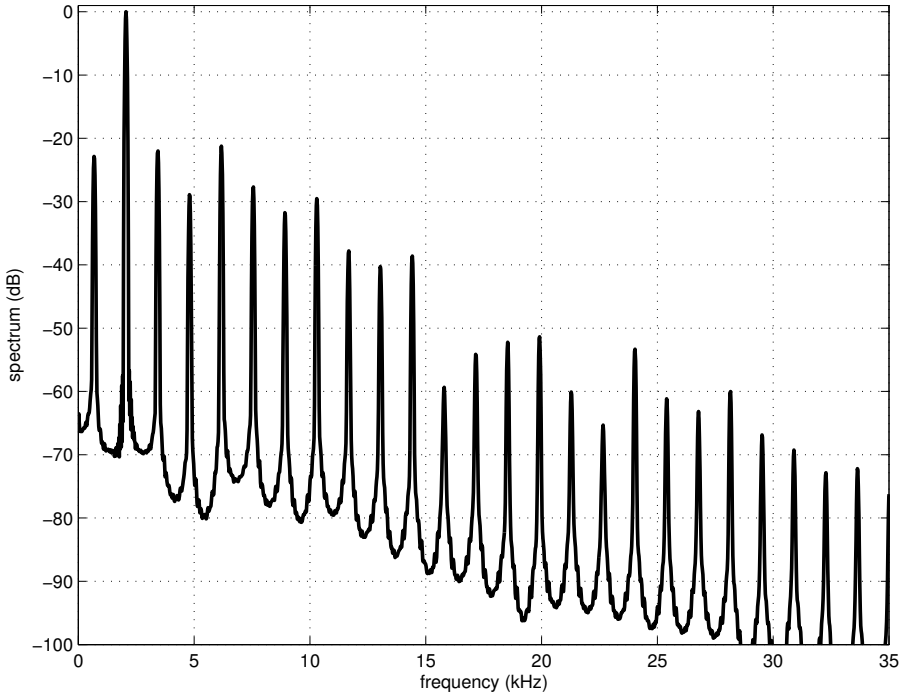

Figure 2: représentation fréquentielle du signal étudié dans l'exercice 3.

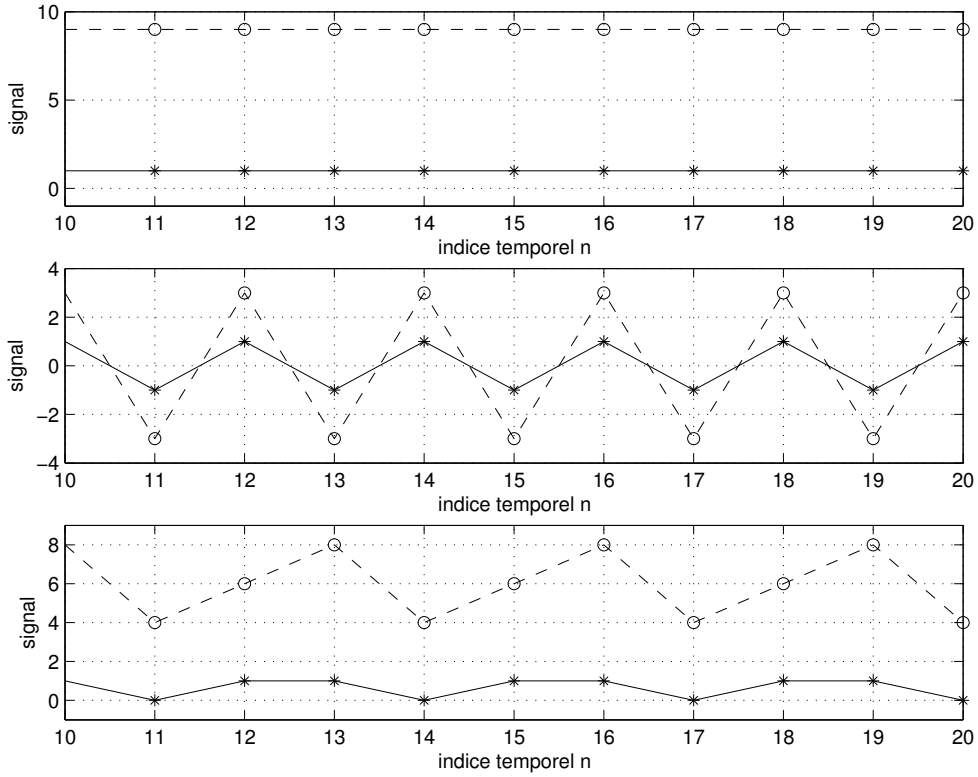

Figure 3: Réponses du système étudié dans l'exercice 4 à trois signaux d'excitation différents. Les échantillons du signal d'entrée $x[n]$ sont désignés par des étoiles et reliés par des traits continus. Les échantillons du signal de sortie $y[n]$ désignés par des cercles et reliés par des traits pointillés.