DS info instrum S2, 2015/2016, correction

F. Auger

<u>exo 1</u> Le nombre de chiffres binaires n necessaire pour ecrire un nombre N entier est tel que

$$2^{n-1} \leq N < 2^n$$

donc $2^{n-1} \leq 1{,}5748 \; 10^{79} < 2^n$

$$\Rightarrow (n-1)\ln(2) \leq \ln(1{,}5748) + 79\ln(10) < n\ln(2)$$

$$\Rightarrow n-1 \leq \frac{\ln(1{,}5748)}{\ln(2)} + 79\frac{\ln(10)}{\ln(2)} < n$$

$$263 \leq 263{,}08 < 264$$

Donc $n = 264$ bits, ce qui fait exactement 33 octets car $\frac{264}{8} = 33$ (1 octet = 8 bits)

<u>exo 2</u> 1) $A = +25$ est un nombre entier positif. <u>Sa notation en complément à 2 (NC2) est sa représentation binaire</u>

$25 = 16 + 8 + 1 = (11001)_2 = (00011001)_{nc2}$

$B = -50$ est un nombre entier négatif. Pour obtenir sa NC2 sur 8 bits

- on prend la représentation binaire de $|B| = 50 = 32 + 16 + 2$ <u>que l'on écrit sur 8 bits</u> $= (00110010)_2$
- on prend la négation de chaque chiffre
- on ajoute 1

$$\begin{array}{r} 11001101 \\ 1 \\ \hline 11001110 \end{array}$$

donc $B = -50 = (11001110)_{nc2}$

2) En NC2 sur 8 bits, on peut coder des nombres entre -2^{n-1} et $+2^{n-1}-1$ soit entre -128 et $+127$. Donc $+225$ et -150 ne peuvent pas être codés en NC2 sur 8 bits. Ils peuvent être codés en NC2 sur 9 bits

exo 3

1) Dans la représentation $(127)_b$ le plus grand chiffre est 7.
Donc la base est <u>au moins égale à 8</u>

2) $(127)_b = 1 \times b^2 + 2\,b^1 + 7\,b^0 = b^2 + 2b + 7$

Si $b \geqslant 10$

$b^2 \geqslant 100$

$b^2 + 2b + 7 \geqslant 100 + 2 \times 10 + 7$

$b^2 + 2b + 7 \geqslant (127)_{10}$

donc puisque $(127)_b = (87)_{10} < (127)_{10}$, on en déduit que $b < 10$

3) $8 \leqslant b < 10$ donc on a 2 valeurs possibles, 8 ou 9.

Pour $b = 8$ $\quad b^2 + 2b + 7 = 64 + 16 + 7 = (87)_{10} \longleftarrow$ Donc $b = 8$

Pour $b = 9$ $\quad b^2 + 2b + 7 = 81 + 18 + 7 = (106)_{10}$

$b^2 + 2b + 7 = 87 \Leftrightarrow b^2 + 2b - 80 = 0 \Leftrightarrow b = 8$ ou $b = -10$ (impossible)

exo 4

a) La dernière lettre de l'alphabet contenu dans $(\text{BATIMENT})_b$ est le T, qui est la 20ème lettre de l'alphabet. Donc la plus petite base de représentation est la base $10 + 20 = 30$

b) $(\text{TOI})_{30} = \text{"T"} \times 30^2 + \text{"O"} \times 30^1 + \text{"I"} = 29 \times 900 + 24 \times 30 + 18$
$= (26838)_{10}$

$(\text{MOI})_{30} = \text{"M"} \times 30^2 + \text{"O"} \times 30 + \text{"I"} = 22 \times 900 + 24 \times 30 + 18 = (20538)_{10}$

$(\text{TOI})_{30} + (\text{MOI})_{30} = 26838 + 20538 = (47376)_{10}$
$= 1 \times 30^3 + 22 \times 30^2 + 19 \times 30 + 6 = (1\text{MJ}6)_{30}$

27000 + 19800 + 576

exo 5 a)

a	b	$a \oplus b$	$a.b$	$a \oplus b \oplus a.b$	$a+b$	$\overline{a \oplus b}$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1	1

$=$

donc $a \oplus b \oplus (a.b) = a+b$

b) $(a \oplus b) \oplus (a.b) = (a \oplus b).\overline{a.b} + \overline{a \oplus b}.(a.b)$

$= (a.\bar{b} + \bar{a}.b).(\bar{a}+\bar{b}) + (\bar{a}.\bar{b} + a.b).(a.b)$

$= a.\bar{a}.\bar{b} + \bar{a}.\bar{a}.b + a.\bar{b}.\bar{b} + \bar{a}.b.\bar{b}$
$\quad + a.\bar{a}.b.\bar{b} + a.b.a.b$

$= 0 + \bar{a}.b + a.\bar{b} + 0 + 0 + a.b$

$= \bar{a}.b + a.\bar{b} + a.b$

$= \bar{a}.b + a.\bar{b} + a.b + a.b$

$= (\bar{a}+a).b + a.(\bar{b}+b) = 1.b + 1.a = \underline{\underline{a+b}}$

Sommes canoniques:

$a \oplus b = a.\bar{b} + \bar{a}.b$

$\overline{a \oplus b} = a.b + \bar{a}.\bar{b}$

$a+b = a.\bar{b} + \bar{a}.b + a.b$

$a.\bar{a} = 0$!

$a.a = a$

c)

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

d) $F = \bar{a}.\bar{b}.c + \bar{a}.b.\bar{c} + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.c$

$= \bar{a}(\bar{b}.c + b\bar{c}) + a(\bar{b}\bar{c} + b.c)$

$= \bar{a}\,(b \oplus c) + a\,\overline{b \oplus c}$

$= \underline{\underline{a \oplus (b \oplus c)}}$

exo 6

s	b	h	V_1	V_2	
0	0	0	1	1	
0	0	1	X	X	cas impossible
0	1	0	X	X	cas impossible
0	1	1	X	X	cas impossible
1	0	0	1	0	
1	0	1	X	X	cas impossible
1	1	0	0	1	
1	1	1	0	0	

V_1

s \ bh	00	01	11	10
0	1	X	X	X
1	1	X	0	0

$V_1 = \bar{b}$

V_2

s \ bh	00	01	11	10
0	1	X	X	X
1	0	X	0	1

autre solution :

$V_2 = \bar{s} + b.\bar{h}$

$V_2 = \bar{s}\,\bar{b}\,\bar{h} + s.b.\bar{h}$

$= (\bar{s}.\bar{b} + s.b).\bar{h}$

$= (\overline{s \oplus b}).\bar{h}$

Autre solution : $V_2 = \bar{s} + b.\bar{h}$

D

s \ bh	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	1	0	0

$D = \underbrace{\bar{b}.h}_{} + \underbrace{\bar{s}.b}_{}$

b à 1 alors que s à 0 (quel que soit h)

h à 1 alors que b à 0 (quel que soit s)

Attention !

a	b	$\bar{a}.\bar{b}$	$\overline{a.b}$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

$\bar{a}.\bar{b} \neq \overline{a.b}$!!

Il ne faut pas confondre $\bar{a}.\bar{b}$ et $\overline{a.b}$!!

Université de Nantes - IUT de Saint-Nazaire - Département Mesures Physiques

Devoir surveillé d'informatique d'instrumentation

Semestre 2, année 2015/2016. Durée : **1 heure 30**.

Toutes vos réponses doivent être suffisamment justifiées. Les six exercices sont indépendants. Si vous joignez cet énoncé à votre copie, indiquez ci-dessous votre nom, prénom et groupe.

nom, prénom	groupe

1. **(2 points)** En 1956, l'astrophysicien A.S. Eddington a démontré que le nombre de protons (et d'électrons) dans l'univers observable est égal[1] à $N = 1,5748\,10^{79}$.
   (a) Combien faudrait-il de chiffres pour coder ce nombre en binaire ?
   (b) Combien d'octets sont nécessaires pour stocker cette représentation ?

2. **(2 points)**
   (a) Quelles sont les notations en complément à 2 sur 8 bits des nombres $A = +25$ et $B = -50$?
   (b) Est-il également possible de coder en notation en complément à 2 sur 8 bits des nombres $A' = +225$ et $B' = -150$?

3. **(4 points)** On souhaiterait savoir dans quelle base de représentation b on a l'égalité $(127)_b = (87)_{10}$.
   (a) Quelle est la valeur minimale de b ?
   (b) Le nombre b est-il inférieur ou supérieur à 10 ?
   (c) En déduire la valeur de b.

4. **(4 points)**
   (a) En utilisant les lettres de l'alphabet pour désigner les chiffres supérieurs à 10 des représentations dans des bases supérieures à 10 (comme pour l'hexadécimal), quelle est la plus petite base b dans laquelle un nombre peut être représenté par $(BATIMENT)_b$?
   (b) Dans cette base b, combien vaut $(TOI)_b$+$(MOI)_b$?

5. **(4 points)** Soient a, b, c, trois variables logiques.
   (a) En complétant le tableau de vérité de la figure 1, montrer que $a \oplus b \oplus (a.b) = a + b$.
   (b) Retrouver ce résultat par un calcul algébrique. On commencera d'abord par écrire les sommes canoniques de $a \oplus b$, $\overline{a \oplus b}$ et $a + b$.
   (c) Soit $F(a, b, c)$ la fonction logique qui est égale à 1 si le nombre de niveaux logiques 1 en entrée est impair (soit un seul, soit trois niveaux logiques 1 en entrée). Donner le tableau de vérité de cette fonction logique en complétant la figure 2.
   (d) Écrire la somme canonique de la fonction $F(a, b, c)$. En déduire que $F(a, b, c) = a \oplus b \oplus c$.

6. **(4 points)** Un réservoir (voir figure 3) est alimenté par deux vannes, commandées à l'aide des variables logiques V_1 et V_2. Un niveau logique 1 correspond à l'ouverture de la vanne. Trois situations différentes peuvent être distinguées à l'aide de trois capteurs : sécurité (s), bas (b), et haut (h). Lorsque le niveau de liquide est au dessus d'un capteur, sa sortie est au niveau logique 1. Le remplissage du réservoir est réalisé par les règles suivantes :

[1] Voir `https://en.wikipedia.org/wiki/Eddington_number`. Plus exactement, le nombre d'Eddington est égal à 157477241362750025776056539611815554680447179145271167093662314250761856310312 96.

a	b	$a \oplus b$	$a.b$	$a \oplus b \oplus (a.b)$	$a + b$	$\overline{a \oplus b}$

Figure 1: Tableau utilisé dans l'exercice 5.

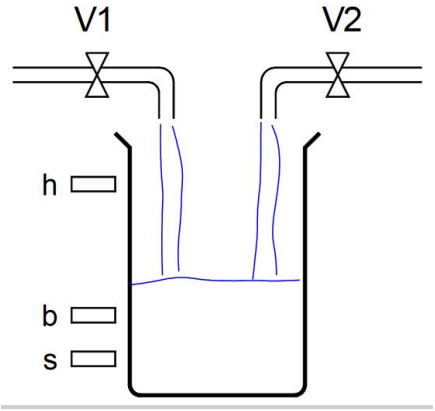
a	b	c	$F(a,b,c)$

Figure 2: Tableau utilisé dans l'exercice 5.

- Lorsque le niveau est au dessous de s, on ouvre les vannes V_1 et V_2 ;
- Lorsque le niveau est entre s et b on ouvre la vanne V_1 seulement ;
- Lorsque le niveau est entre b et h on ouvre la vanne V_2 seulement ;
- Lorsque le niveau est détecté par h on ferme les deux vannes.

Déterminer les équations logiques minimales des variables V_1 et V_2 de commande deux vannes en fonction du niveau détecté par les 3 capteurs s, b et h. On pourra pour cela utiliser des tableaux de Karnaugh. Comme indiqué en cours, on notera par un x les cas où les fonctions ne sont pas définies, et on choisira les valeurs de x qui fournissent des expressions les plus simples.

Soit D la variable logique indiquant une défaillance d'au moins un capteur. Déterminer une expression logique minimale de D.



s	b	h	V_1	V_2	D

$\mathbf{V}_1$	b,h			
s	00			
0				

$\mathbf{V}_2$	b,h			
s	00			
0				

Figure 3: Problème de remplissage d'un réservoir étudié dans l'exercice 6.