Correction du 2ème DS Informatique d'Instrumentation 1

13 juin 2013, F. Auger

Exercice 1

produit canonique du ou exclusif

1ère méthode : $(a+b).\overline{a.b} = \overbrace{(a+b).(\bar{a}+\bar{b})} = \underbrace{a.\bar{a}}_{=0} + \bar{a}.b + a.\bar{b} + \underbrace{b.\bar{b}}_{=0}$

$= a.\bar{b} + \bar{a}.b = a \oplus b$

2ème méthode →

a	b	$a+b$	$a.b$	$\overline{a.b}$	$(a+b).\overline{a.b}$	$a\oplus b$
0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0

L'expression $(a+b).\overline{a.b}$ est l'écriture mathématique de l'affirmation "$a\oplus b$ vaut 1 si a ou b vaut 1 et pas les deux".

Dans les 4 cas $(a+b).\overline{a.b} = a\oplus b$, donc les 2 fonctions sont égales

Exercice 2

a) $0 \leq f < 1 \Rightarrow 1 \leq 1+f < 2 \Rightarrow 2^{\ell} \leq (1+f)2^{\ell} < 2^{\ell+1}$

$\Rightarrow \boxed{2^{\ell} \leq |x| < 2^{\ell+1}}$

car $|x| = |(-1)^s|(1+f)2^{\ell} = (1+f)2^{\ell} \Rightarrow 1+f = \frac{|x|}{2^{\ell}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{|x|}{2^{\ell}} - 1}$

b) Pour $x = -\sqrt{3}$, $|x| = \sqrt{3}$ donc $1 \leq |x| < 2$ donc $\ell = 0 \Rightarrow E = 15 = (01111)_2$

Donc $f = \frac{|x|}{2^{\ell}} - 1 = \sqrt{3} - 1 = \frac{F}{1024} \Rightarrow F \approx (1024)(\sqrt{3}-1) \approx 750 = (1011101110)_2$

Pour $x = \pi$, $|x| = \pi$ donc $2 \leq |x| < 4$ donc $\ell = 1 \Rightarrow E = 16 = (10000)_2$

Donc $f = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{F}{1024} \Rightarrow F \approx 1024\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 584 = (1001001000)_2$

Donc $(1\,01111\,1011101110)_{b16} = (-1) \times \left(1 + \frac{750}{1024}\right) \times 2^0 \approx -\sqrt{3}$

et $(0\,|\,10000\,|\,1001001000)_{b16} = (+1) \times \left(1 + \frac{584}{1024}\right) \times 2^1 \approx \pi$

erreur de codage :

$e_r = \left[-\left(1 + \frac{750}{1024}\right)\right] - \left[-\sqrt{3}\right] = \sqrt{3} - \left(1 + \frac{750}{1024}\right) = \sqrt{3} - \frac{1774}{1024} = -3{,}71\ 10^{-4}$

$= \sqrt{3} - \frac{887}{512}$

$e_r = \left(1 + \frac{584}{1024}\right)2 - \pi = \frac{1608}{1024} \times 2 - \pi = \frac{1608}{512} - \pi = -9{,}67\ 10^{-4} = \frac{201}{64} - \pi$

c) le plus petit nombre strictement positif est obtenu pour
$F = 0$ et $E = 1$ soit $\ell = E - 15 = -14$ donc $x_{min} = (1+0)\,2^{-14} = 2^{-14}$

le plus grand nombre strictement positif est obtenu pour
$F = 1023$ et $E = 30$ soit $\ell = E - 15 = +15$ donc $x_{max} = \left(1 + \frac{1023}{1024}\right) 2^{15} \approx 2^{16}$

Donc $D_r = 20 \log_{10}\left(\left(1 + \frac{1023}{1024}\right)\frac{2^{15}}{2^{-14}}\right) = 20 \log_{10}\left(\left(1 + \frac{1023}{1024}\right) 2^{29}\right)$

$= 29 \times 20 \log_{10}(2) + 20 \log_{10}\left(1 + \frac{1023}{1024}\right)$

d) s a 2 valeurs possibles : 0 ou 1
E a 30 valeurs possibles : de 1 à 30
F a 1024 valeurs possibles
Donc il y a $2 \times 30 \times 1024$ nombres réels "normaux"
$= 61440$
Auxquels il faut ajouter le zero, $+\infty$ et $-\infty$
Il y a donc $2 \times 30 \times 1024 + 3$ codes différents, sur les
$= 61443$
$2^{16} = 65536$ possibles

Exo 3

C'est un circuit synchrone : toutes les bascules sont activées par le même signal d'horloge

a) $J_0 = \overline{Q_2}$ $K_0 = 1$

$J_1 = Q_0$ $K_1 = 1$

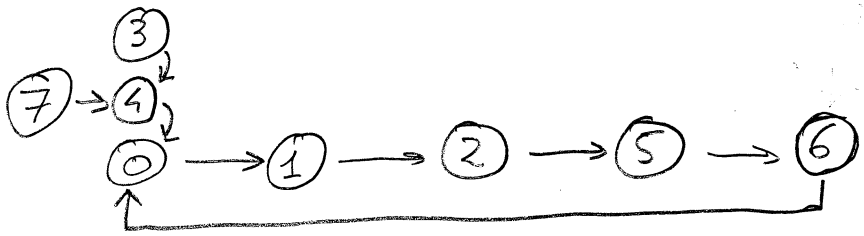
$J_2 = Q_1$ $K_2 = \overline{Q_0}$

Donc

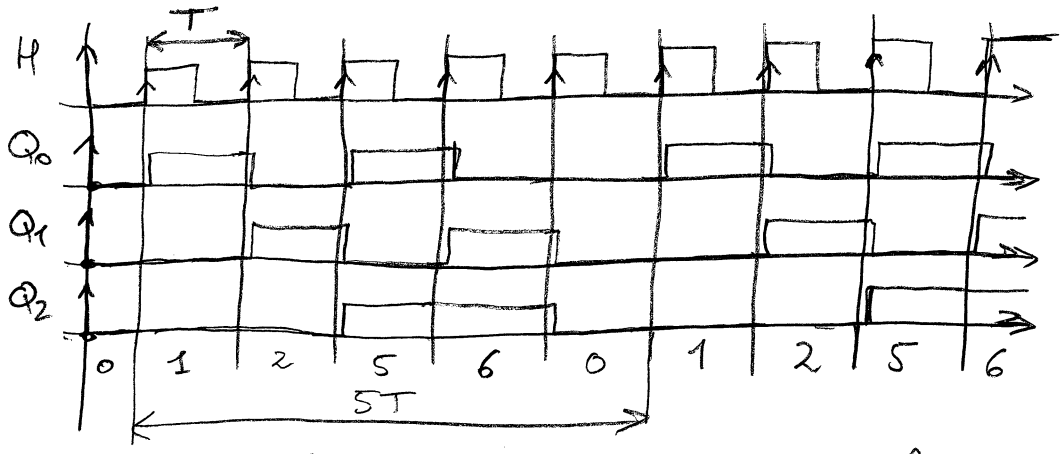
valeur actuelle									valeur future		
Q_2	Q_1	Q_0	$J_2 = Q_1$	$K_2 = \overline{Q_0}$	$J_1 = Q_0$	$K_1 = 1$	$J_0 = \overline{Q_2}$	$K_0 = 1$	Q_2'	Q_1'	Q_0'
0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0

J	K	Q
0	0	Qpréc
0	1	0
1	0	1
1	1	$\overline{Qpréc}$

Donc



Partant de zéro, ce circuit parcourt un cycle à 5 temps



Q_2 est un signal de période 5T, de rapport cyclique égal à $\frac{2}{5} = 40\%$

b) Après 3, il y a 4. Après 4, il y a 0. Après 7, il y a 6

Donc ce circuit est stable : si on l'écarte de son cycle nominal à 5 temps, il y retourne naturellement

c)

Q_2	Q_1	Q_0	S_2	S_1	S_0
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	X	X	X
1	0	0	X	X	X
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	X	X	X

S_2

Q_2Q_1 \ Q_0	0	1
00	0	0
01	0	X
11	1	X
10	X	0

$\rightarrow S_2 = Q_2 \cdot Q_1$

S_1

Q_2Q_1 \ Q_0	0	1
00	0	0
01	1	X
11	0	X
10	X	1

$S_1 = Q_2 \oplus Q_1$

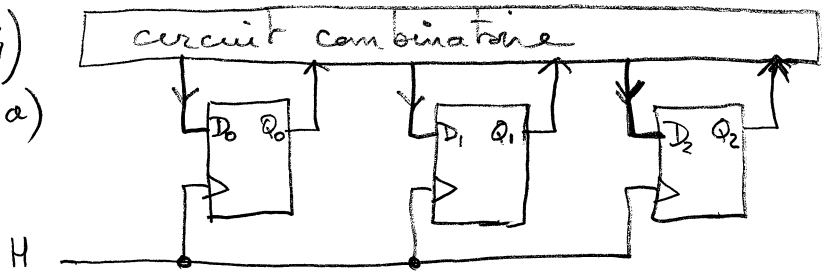
S_0

Q_2Q_1 \ Q_0	0	1
00	0	1
01	0	X
11	0	X
10	X	1

$S_0 = Q_0$

4)

a)



D	Q
0	0
1	1

D est la future valeur de Q !

On a une structure habituelle de circuit synchrone :

- les 3 bascules D sont activées par le même signal d'horloge
- les sorties des bascules sont envoyées à l'entrée d'un circuit combinatoire, qui calcule les niveaux qu'il faut avoir à l'entrée des bascules pour obtenir les transitions désirées

b) c) d)

Q_2	Q_1	Q_0	D_2	D_1	D_0
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0

On veut que $(Q_2\,Q_1\,Q_0)$ compte en code Gray sur 3 bits

$(D_2\,D_1\,D_0)$ est la future valeur de $(Q_2\,Q_1\,Q_0)$

D_2 : Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

$D_2 = Q_2 Q_0 + Q_1 \overline{Q_0}$
$= Q_0 \cdot Q_2 + \overline{Q_0} \cdot Q_1$

D_1 : Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
0	0	1	1	1
1	0	0	0	1

$D_1 = \overline{Q_2} Q_0 + Q_1 \overline{Q_0}$
$= Q_0 \cdot \overline{Q_2} + \overline{Q_0} Q_1$

D_0 : Q_2 \ Q_1Q_0	00	01	11	10
0	1	1		
1			1	1

$D_0 = \overline{Q_2} \cdot \overline{Q_1} + Q_2 \cdot Q_1 = \overline{Q_2 \oplus Q_1}$
$= Q_1 \cdot Q_2 + \overline{Q_1} \cdot \overline{Q_2}$

Sur chaque ligne du tableau de vérité, ce qu'il y a sur les entrées D sont les prochaines valeurs des sorties Q

Q_2 Q_1 Q_0	D_2 D_1 D_0
0 0 0	0 0 1
0 0 1	0 1 1
0 1 1	

et ainsi de suite

	1 0 0
1 0 0	0 0 0

Exo 5

a) Une fonction de logique combinatoire totalement symétrique est caractérisée par un vecteur (a_0, a_1, a_2). Chaque élément a_i vaut 0 ou 1. Donc il y a $2^3 = 8$ fonctions de logique combinatoire totalement symétriques

Pour 3 entrées, le vecteur caractéristique est (a_0, a_1, a_2, a_3)

Donc il y a $2^4 = 16$ fonctions totalement symétriques

Pour n entrées, il y a 2^{n+1} fonctions totalement symétriques

car le vecteur caractéristique est de dimension $n+1$

b) r a pour vecteur caractéristique $(0, 0, 1, 1)$

s $(0, 1, 0, 1)$

t $(1, 0, 0\ 1)$

Pour r, s, t $f(0,0,1) = f(0,1,0) = f(1,0,0)$

$f(0,1,1) = f(1,1,0) = f(1,0,1)$

donc elles sont totalement symétriques

m n'est pas totalement symétrique $f(0,0,1) \neq f(0,1,0)$

$f(1,0,1) \neq f(1,1,0)$

Pour 2 entrées : soit aucun 1 (00), soit un niveau 1 (01 ou 10), soit 2 niveaux 1 (11)

000 fonction nulle
001 et logique
010 ou exclusif
011 ou logique
100 non ou
101 non ou exclusif
110 non et
111 fonction 1

		r	s	t	m
aucun 1	000	0	0	1	0
un 1	001	0	1	0	0
	010	0	1	0	1
	100	0	1	0	0
deux 1	011	1	0	0	1
	101	1	0	0	1
	110	1	0	0	0
trois 1	111	1	1	1	1

!

!

Université de Nantes - IUT de Saint-Nazaire

Département Mesures Physiques

Devoir surveillé d'informatique d'instrumentation I

Semestre 2, 2012/2013. Durée : 1 **heure 50**.

Les cinq exercices sont indépendants. Si vous joignez cet énoncé à votre copie, indiquez ci-dessous votre nom, prénom et groupe.	
nom, prénom	groupe

1. **(3 points)** Soient a et b deux variables logiques. Démontrer (algébriquement ou à l'aide de tableaux de vérité) que quelles que soient les valeurs de a et b, $(a+b) \cdot \overline{a \cdot b} = a \oplus b$.

2. **(5 points)** La norme IEE754-2008 définit un format de codage en virgule fixe des nombres réels sur 16 bits, appelé[1] *binary16*. Ce format relativement récent est utilisé dans les processeurs graphiques (GPU) GeForce de la société Nvidia et dans des environnements graphiques tels que OpenGL. Dans ce format (voir figure 1), chaque nombre réel non nul est codé sous la forme $x = (-1)^s.(1+f).2^l$, où

   - s indique le signe ;
   - l est l'exposant, codé sur 5 bits par le nombre $E = (e_4\, e_3\, e_2\, e_1\, e_0)_2 = l + 15$. Le nombre $E = 0$ est utilisé pour le codage de zéro, et $E = 31$ est utilisé pour le codage de $+\infty$ et $-\infty$. Pour des nombres réels non nuls et non infinis, E prend des valeurs comprises entre 1 et 30 ;
   - f est la partie fractionnaire de la mantisse, codée en binaire sur 10 bits, soit

$$f = (0.f_1 f_2 f_3 \ldots f_{10})_2 = \frac{F}{1024} \text{ avec } F = (f_1\, f_2\, f_3\, \ldots\, f_{10})_2$$

   (a) En partant de la relation $0 \leq f < 1$, montrer que l est le nombre entier relatif tel que $2^l \leq |x| < 2^{l+1}$, et que $f = \frac{|x|}{2^l} - 1$.

   (b) Quel est le code *binary16* des nombres $x = -\sqrt{3}$ et $x = \pi$? Combien vaut l'erreur de codage dans ces deux cas ?

   (c) Quels sont le plus petit nombre strictement positif $x_{\min}$ et le plus grand nombre strictement positif $x_{\max}$ qui peuvent être représentés de cette manière ? On appelle *dynamique de représentation* la valeur en déciBel du rapport de ces deux nombres: $D_r = 20 \log_{10}(x_{\max}/x_{\min})$. Calculer la dynamique de représentation de ce système de codage.

   (d) Combien de nombres réels différents cette technique permet-elle de coder ?

15	14	...	...	...	10	9	...	...	...	...	...	...	...	...	0
s	e_4	e_3	e_2	e_1	e_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}

Figure 1: format *binary16* de codage des nombres réels en virgule flottante étudié dans l'exercice 2.

3. **(5 points)** Le circuit de la figure 2 est constitué de 3 bascules JK dont les entrées d'horloge sont toutes reliées au même signal H, qui est un signal périodique de période T et de rapport cyclique égal à 50 %. On numérotera les bascules de 0 à 2 de gauche à droite et on notera J_i, K_i, Q_i les entrées J et K et la sortie Q de chaque bascule i ($i = 0$, 1 ou 2).

[1] Voir `http://en.wikipedia.org/wiki/Half-precision_floating-point_format`.

(a) Rappeler le tableau de comportement d'une bascule JK. Quelles sont les expressions de J_0, K_0, J_1, K_1, J_2 et K_2 ? Faire un chronogramme représentant l'évolution de H, Q_0, Q_1 et Q_2 sur au moins 7 périodes du signal H. On considérera qu'à l'instant initial, les sorties des trois bascules sont au niveau logique bas et que ces 3 bascules ont le même retard de propagation. Quelle est la période du signal Q_2 ? Quel est son rapport cyclique ? Quelles sont les valeurs successives de $(Q_2\,Q_1\,Q_0)_2$?

(b) Si à un instant donné, $(Q_2\,Q_1\,Q_0)_2$ est égal à 3, que vaut $(Q_2\,Q_1\,Q_0)_2$ après le front montant de H suivant ? Même question pour $(Q_2\,Q_1\,Q_0)_2 = 4$ et $(Q_2\,Q_1\,Q_0)_2 = 7$.

(c) Quelles sont les équations du circuit supplémentaire qui transforme les sorties Q_2, Q_1 et Q_0 de ce circuit en un code binaire ordonné ?

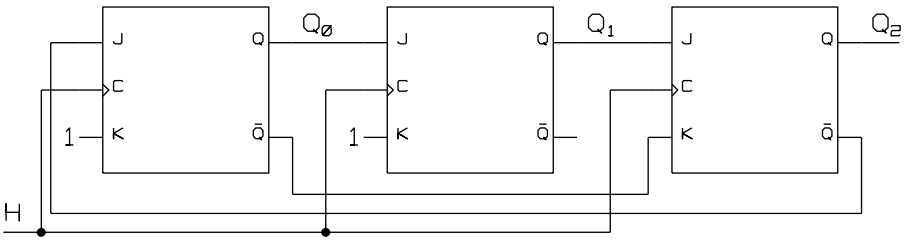


Figure 2: circuit étudié dans l'exercice 3.

4. **(4 points)** On souhaite concevoir un compteur cyclique synchrone qui compte en code Gray sur 3 bits. On utilisera pour cela trois bascules D. On rappelle que l'entrée D d'une telle bascule est recopiée sur sa sortie Q juste après le front montant du signal d'horloge. Le niveau logique présent sur l'entrée D correspond donc au niveau logique que vaudra Q après le prochain front montant. On notera Q_2 (à gauche), Q_1 (au milieu) et Q_0 (à droite) les sorties de ces trois bascules et D_2, D_1 et D_0 leurs entrées respectives.

   (a) Faire un schéma de la structure générale de ce circuit et rappeler le tableau de comportement d'une bascule D.

   (b) Quelles sont les valeurs successives des sorties Q_2, Q_1, Q_0 ? Compléter le tableau de vérité de la figure 3.

   (c) Comment doivent être les entrées D_2, D_1 et D_0 des bascules pour obtenir les évolutions désirées des sorties Q_2, Q_1, Q_0 ?

   (d) Quelles sont les expressions logiques minimales de D_2, D_1 et D_0 en fonction de Q_2, Q_1, Q_0 ? On pourra pour cela utiliser les tableaux de Karnaugh de la figure 3

5. **(3 points)** Une fonction de logique combinatoire est dite *totalement symétrique*[2] si sa sortie reste inchangée après n'importe quelle permutation de deux de ses variables d'entrée. Pour de telles fonctions, il n'est alors pas nécessaire d'indiquer précisément le nom et l'emplacement de chaque entrée : elles jouent toutes le même rôle. Leur utilisation est donc particulièrement simple. En 1938, C.E. Shannon a démontré qu'une fonction est totalement symétrique si sa valeur ne dépend que du nombre de niveaux logiques 1 présents sur ces entrées. Une fonction totalement symétrique est donc caractérisée par un vecteur $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n)$, avec $a_i = 0$ ou 1, dont les éléments correspondent aux valeurs de la fonction quand il y a 0, 1, 2,... n entrées au niveau logique haut. Par exemple,

   - $(0, 0, 1)$ est le vecteur caractéristique de la fonction ET à deux entrées (elle ne vaut 1 que quand les deux variables sont à 1).
   - $(0, 1, 1)$ est le vecteur caractéristique de la fonction OU à deux entrées (elle ne vaut 1 que quand une ou deux variables sont à 1).
   - $(0, 1, 0)$ est le vecteur caractéristique de la fonction OU EXCLUSIF à deux entrées (elle ne vaut 1 que quand une seule variable est à 1).

[2] Voir S.N. Yanushkevitch et V.P. Shmerko, "Introduction to logic design", CRC Press, 2008, p. 146.

Q_2	Q_1	Q_0	D_2	D_1	D_0

$\mathbf{D}_2$	$Q_1\,Q_0$			
Q_2	00			
0				
1				

$\mathbf{D}_1$	$Q_1\,Q_0$			
Q_2	00			
0				
1				

$\mathbf{D}_0$	$Q_1\,Q_0$			
Q_2	00			
0				
1				

Figure 3: Tableaux utilisés dans l'exercice 4.

(a) Combien y-a-t-il de fonctions logiques totalement symétriques à deux entrées ? Combien y-en-a-t-il à trois entrées ? Combien y-en-a-t-il à n entrées ?

(b) La fonction $r = f(a, b, c)$ définie par le tableau de vérité de la figure 4 est-elle totalement symétrique ? Si oui, quel est son vecteur caractéristique ? Mêmes questions pour les fonctions s, t et m définies par le tableau de vérité de la figure 4.

c	b	a	r	s	t	m
0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1

Figure 4: Tableau utilisé dans l'exercice 5.