

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Géométrie différentielle*

Par

Lucas PINSARD MOREL

Étude du flot gradient d'application moment sur les tores de dimension 2 et 4, et théorie de la perturbation locale de l'espace de module des connexions complexes plates sur une famille dégénérante de surfaces de Riemann

Thèse présentée et soutenue à Université des sciences et techniques de Nantes, le 15/12/2025
Unité de recherche : GAG

Rapporteurs avant soutenance :

Frédéric ROCHON professeur des universités à l'UQAM
Sebastian HELLER research professor at Tsinghua University

Composition du Jury :

Attention, en cas d'absence d'un des membres du Jury le jour de la soutenance, la composition du jury doit être revue pour s'assurer qu'elle est conforme et devra être répercutée sur la couverture de thèse

Président :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (à préciser après la soutenance)
Examineurs :	Andrei MOROIANU	directeur de recherche au CNRS à l'Université Paris-Saclay
	Elise GOJJARD	professeure des universités à Nantes université
	Eveline LEGENDRE	professeure des universités à l'Université Claude Bernard Lyon 1
Dir. de thèse :	Yann ROLLIN	Professeur au laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL) de Nantes Université

Invité(s) :

∅

Titre : Étude du flot gradient d'application moment sur les tores de dimension 2 et 4, et théorie de la perturbation locale de l'espace de module des connexions complexes plates sur une famille dégénérante de surfaces de Riemann

Mot clés : symplectomorphismes, tores, flot d'application moment, DeTurck, espace de module des connexions complexes plates, équations de Hitchin, surface de Riemann

Résumé : Cette thèse est composée de deux parties : une pour chaque projet que j'ai entamé au cours de ces trois dernières années. Le premier a pour objectif d'explorer la topologie globale du groupe des symplectomorphismes du tore de dimension 4 grâce à un flot d'application moment ; cette dernière servant à réaliser le dit groupe comme son lieu de zéros. Nous traitons le cas du tore de dimension 2 comme exemple introductif. Le flot n'étant pas elliptique, nous utilisons une astuce due à DuTurck exploitant les symétries de l'équation afin de la transformer en un problème parabolique. Nous prouvons alors un résultat d'exis-

tence en temps court de ce flot auprès de n'importe quel symplectomorphisme. Le second vise à comprendre comment l'espace de module des connexions $SL_2(\mathbb{C})$ -plates au dessus d'une famille de surface de Riemann qui dégénère le long d'un cycle séparant en un nœud se comporte. Nous décrirons toute l'analyse locale à effectuer proche du nœud, puis nous esquisserons brièvement une explication de comment recoller les informations locales obtenues sur chaque composantes connexes de part et d'autre du cycle séparant/nœud en une information globale.

Title: Moment map gradient flow of symplectomorphisms over the tori of real dimension 2 and 4, and local perturbation theory for the moduli space of complex flat connections over a degenerating family of Riemann surfaces.

Keywords: symplectomorphisms, tori, moment map flow, DeTurck, moduli space of complex flat connections, Hitchin's equations, Riemann surfaces

Abstract: This thesis is separated into two parts : one for each project I started during these three years. The main goal of the first one is to explore the global topology of the symplectic group of the four dimensional torus by mean of a so-called moment map flow ; the moment map being used to realize the group as its zero locus. We use the two dimensional torus as an introductory exemple to apply our method. The flow is not elliptic, we therefore use a DeTurck type of argument

in order to change it into a parabolic one. We then prove a short time existence result for this flow near any symplectomorphism. Whereas for the second one, the point is the study of how the moduli space of complex flat connections behave above a family of Riemann surfaces that has a separating cycle degenerating to a node. We'll explain the local picture of this problem around the degenerating node, and we'll explain briefly how to glue things globally after doing all the local operator analysis.