THESE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ,
EN COTUTELLE INTERNATIONALE AVEC
L'UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES

ECOLE DOCTORALE N° 641
Mathématiques et Sciences et Technologies du numérique, de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par
Paul MANSANAREZ

Refined asymptotics and limit theorems in Probability

Stein's method, Edgeworth expansion, MMSE, Zeros of processes and BMD

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le « date »
Unité de recherche : UMR 6629 Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Rapporteurs avant soutenance :

Giovanni PECCATI	Professeur, Université du Luxembourg, Luxembourg
Maurizia ROSSI	Professeure, Université de Milan-Bicocca, Italie

Composition du Jury :

Président :	Davy PAINDAVEINE	Professeur, Université libre de Bruxelles, Belgique
Examinateurs :	Paul-Éric CHAUDRU DE RAYNAL	Maître de conférences, Nantes Université, France
	Jürgen ANGST	Professeur, Université de Bretagne Occidentale, France
	Dominique MALICET	Maître de conférences, Université Gustave-Eiffel, France
	Prénom Nom	Professeur, Université du Luxembourg, Luxembourg
	Maurizia ROSSI	Professeure, Université de Milan-Bicocca, Italie
Dir. de thèse :	Guillaume POLY	Professeur, Nantes Université, France
Co-dir. de thèse :	Yvik SWAN	Professeur, Université libre de Bruxelles, Belgique

Titre : Asymptotiques fines et théorèmes limites en Probabilités

Mots clés : Méthode de Stein, développement de Edgeworth, Breuer-Major, Γ-calcul, ensembles nodaux

Résumé : Cette thèse étudie des théorèmes limites en probabilités ainsi qu'une conjecture de théorie de l'information, à travers cinq contributions. Premièrement, nous établissons des développements d'Edgeworth non asymptotiques à tout ordre, avec erreur explicite, pour des variables appartenant à un chaos de Wiener fixé ou à une somme finie de chaos. Fondée sur la méthode de Malliavin--Stein et les propriétés spectrales de l'opérateur d'Ornstein--Uhlenbeck, l'approche s'étend aux chaos de Markov. Deuxièmement, nous démontrons un principe d'invariance de Breuer--Major--Donsker pour les suites gaussiennes stationnaires, sous la seule hypothèse de variance finie. La preuve combine une décomposition martingale-prévisible et la théorie de la prédiction gaussienne. Troisièmement, nous prouvons l'universalité du volume nodal de polynômes trigonométriques à coefficients i.i.d. dans le domaine d'attraction d'une loi stable. Quatrièmement, nous développons une méthode de Stein par comparaison de générateurs, fournissant des bornes en distances de probabilités usuelles, puis l'appliquons à l'approximation de Fréchet par des maxima normalisés. Enfin, nous étudions les dérivées de l'entropie le long du flot de la chaleur et obtenons des conditions cumulantiques impliquant la conjecture MMSE, notamment pour les lois uniforme symétrique et de Rademacher.

Title : Refined asymptotics and limit theorems in Probability

Keywords : Stein's method, Edgeworth expansion, Breuer-Major, Γ-calculus, nodal sets

Abstract : This thesis investigates limit theorems in probability, together with a conjecture arising from information theory, through five main contributions. First, we establish non-asymptotic Edgeworth expansions of arbitrary order, with explicit error bounds, for random variables belonging to a fixed Wiener chaos or a finite sum of Wiener chaoses. Based on the Malliavin--Stein method and the spectral properties of the Ornstein--Uhlenbeck operator, our approach extends to Markov chaoses. Second, we prove a Breuer--Major--Donsker invariance principle for stationary Gaussian sequences under the sole assumption that the test function has finite variance. The proof combines a martingale--predictable decomposition with Gaussian prediction theory. Third, we establish the universality of the nodal volume of random trigonometric polynomials with i.i.d. coefficients in the domain of attraction of a stable distribution. Fourth, we develop a generator-comparison approach to Stein's method, yielding bounds in standard probability metrics, and apply it to the approximation of the Fréchet distribution by normalized maxima. Finally, we study the derivatives of entropy along the heat flow and derive cumulant conditions implying the MMSE conjecture, notably for the symmetric uniform and Rademacher distributions.