

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 641

*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*

Spécialité : *Mathématiques et leurs Interactions*

Par

Khaled ABOU ALFA

Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries

Thèse présentée et soutenue à Nantes Université, le 14 décembre 2023

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Rapporteurs avant soutenance :

M. Vincent BRUNEAU Professeur des universités, Université de Bordeaux
M. Setsuro FUJIE Professeur des universités, Ritsumeikan University

Composition du Jury :

Président :	Prénom NOM	Fonction et établissement d'exercice (<i>à préciser après la soutenance</i>)
Examineurs :	Mme. Virginie BONNAILLIE-NOËL	Professeur, ENS Paris
	M. Vincent BRUNEAU	Professeur des universités, Université de Bordeaux
	M. Søren FOURNAIS	Professeur des universités, Université de Copenhague
	M. Setsuro FUJIE	Professeur des universités, Ritsumeikan University
	M. Luc HILLAIRET	Professeur des universités, Université d'Orléans
	M. Gabriel RIVIERE	Professeur des universités, Nantes Université
Dir. de thèse :	M. Frédéric HÉRAU	Professeur des universités, Nantes Université

Titre : Effets tunnels magnétiques dans diverses géométries

Mot clés : Equation de Schrödinger ; Laplacien magnétique ; estimations d'Agmon ; équation eikonal ; opérateur pseudo-différentiel ; effet tunnel.

Résumé : Cette thèse est consacrée à l'étude spectrale de l'opérateur de Schrödinger avec un champ purement magnétique et variable dans la limite semi-classique. Dans la première partie, nous travaillons en dimension 2 avec annulation du champ magnétique sur une courbe fermée. Sous des hypothèses génériques et symétriques en dimension 2, nous établissons une estimation, exponentiellement petite en terme d'un paramètre semi-classique noté par h , de la différence entre les deux premières valeurs propres du Laplacien magnétique qui mesure l'effet tunnel le long de la courbe d'annulation. Dans la deuxième partie, nous travaillons en di-

mension 3 avec un champ magnétique variable dans un domaine ouvert, borné et régulier avec la condition de Neumann aux bord. Avec des hypothèses génériques, nous obtenons une asymptotique complète pour les petites valeurs propres du Laplacien magnétique. Dans les deux parties, il s'agit d'une méthode de réduction spectrale inspiré d'une stratégie de type Born-Oppenheimer et l'utilisation d'une méthode de réduction de type Grushin. Cette méthode nécessite l'utilisation du calcul pseudo-différentiel pour des symboles à valeur opérateur, et réduit le problème à l'étude d'un opérateur effectif de symbole scalaire.

Title: Magnetic tunneling effects in various geometries

Keywords: Schrödinger equation; magnetic Laplacian; Agmon estimates; eikonal equation; pseudo-differential operator; tunnel effect.

Abstract: This thesis is devoted to the spectral study of the Schrödinger operator with a purely magnetic and variable field in the semi-classical limit. In the first part, we work in 2 dimension with vanishing of the magnetic field on a closed curve. Under generic and symmetric assumptions, we derive an estimate, exponentially small in terms of a semi-classical parameter denoted by h , of the difference between the first two eigenvalues of the magnetic Laplacian that measures tunneling effect along the vanishing curve. In the second part, we work in dimension 3 with a variable

magnetic field in an open, bounded and regular domain with the Neumann condition at the boundary. Under generic assumptions, we obtain complete asymptotics for small eigenvalues of the magnetic Laplacian. Both parts involve a spectral reduction method inspired by a Born-Oppenheimer strategy and the use of a Grushin-type reduction method. This method requires the use of pseudo-differential calculus for operator-valued symbols, and reduces the problem to the study of an effective scalar symbol operator.